លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កំរិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី៣

សីហា ២០០៩

ភាគ១ - ទ្រឹស្តីនៃចំនួន

ភាគ២ - ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី១ : គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច -វិសមភាព ២០០៨

ផ្សាយលើកទី២ : កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ

កក្កដា២០០៩

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

ទំនាក់ទំនង

- វ៉ិបសាយ **http://svichet.wordpress.com/**
- អ៊ីម៉ែល **lsvichet@yahoo.com**

សំគាល់

$x \in [a; b]$ មានន័យថា $a \leq x \leq b$

$x \in (a; b)$ មានន័យថា $a < x < b$

$x \in [a; b)$ មានន័យថា $a \leq x < b$

$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\mathbb{N}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $1; 2; 3; \ldots$

$\mathbb{Z}$ សំណុំចំនួនគត់ $\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots$

$\mathbb{Z}_0$ សំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $0; 1; 2; 3; \ldots$

មាតិកា

ផ្នែកទី១ លំហាត់

១. អនុគមន៍ងាយ 1
គណនា..1
សមភាព 1
សមីការ...2
ប្រព័ន្ធសមីការ 6
វិសមភាព...12
វិសមីការ 32
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..35
២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត 37
គណនា...37
សមភាព 37
សមីការ...37
ប្រព័ន្ធសមីការ 40
វិសមភាព...42
វិសមីការ 42
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..46
៣. ត្រីកោណមាត្រ...47
គណនា...47
សមភាព 48
សមីការ...50
ប្រព័ន្ធសមីការ 56
វិសមភាព...57
វិសមីការ 58
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..59
៤. ពហុធា 61
៥. សមីការអនុគមន៍...63

ផ្នែកទី២ ចំលើយ

១. អនុគមន៍ងាយ 65
គណនា..65
សមភាព 67
សមីការ..67
ប្រព័ន្ធសមីការ 75
វិសមភាព..82
វិសមីការ 153
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..155
២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត 159
គណនា..159
សមភាព 159
សមីការ..159
ប្រព័ន្ធសមីការ 161
វិសមភាព..161
វិសមីការ 162
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..164
៣. ត្រីកោណមាត្រ..165
គណនា..165
សមភាព 168
សមីការ..170
ប្រព័ន្ធសមីការ 177
វិសមភាព..179
វិសមីការ 184
ប្រព័ន្ធវិសមីការ..185
៤. ពហុធា 187
៥. សមីការអនុគមន៍..189

១. អនុគមន៍ងាយ

I. គណនា

1. គណនា $a^4+b^4+c^4$ ដោយដឹងថា $a+b+c=0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$ ។

គណនា

2. $S_n = 1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

3. $S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3, n \in \mathbb{N}$

4. តាង $S=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1)+1$ ។ ចូរគណនា $S^{1/1024}$ ។

5. (កាណាដា ១៩៦៩)

   គណនា $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+(n-1).(n-1)!+n.n!$

   ដែល $n!=n.(n-1)\dots3.2.1$ ។

6. គណនា

$$S=\frac{1}{1!\,1999!}+\frac{1}{3!\,1997!}+\cdots+\frac{1}{1997!\,3!}+\frac{1}{1999!\,1!}$$

7. គេអោយចំនួនពិត u, v, s, t ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$u+v+s+t=u^7+v^7+s^7+t^7=0$$

   ចូរគណនា $P=t(t+u)(t+v)(t+s)$

II. សមភាព

ចូរបង្ហាញថា

8. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$

9. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, n \in \mathbb{N}$

10. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$1.2+2.5+\ldots+n.(3n-1)=n^2(n+1)$

11. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$

12. តាង a, b, c ជាចំនួនពិត ខុសពី -1 និង 1 ដែល $a+b+c=abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

13. (**កាណាដា ១៩៦៩**)

ចូរបង្ហាញថា បើ $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ និង $p_1; p_2; p_3$ មិនសូន្យទាំងអស់ព្រមគ្នា នោះ

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n}{p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

14. $\boldsymbol{x^3+2x^2-x-2=0}$
15. $\boldsymbol{x^3-x^2-8x+12=0}$
16. $\boldsymbol{x^3-9x^2+27x-27=0}$
17. $\boldsymbol{x^3+x^2-3=0}$
18. $\boldsymbol{6x^3+7x^2-1=0}$
19. $\boldsymbol{2x^3+x^2+5x-3=0}$
20. $\boldsymbol{2x^4-5x^2+2=0}$
21. $\boldsymbol{x^4-2x^2-3=0}$
22. $\boldsymbol{(x-1)^4+(x+1)^4=16}$
23. $\boldsymbol{(2x-3)^4+(2x-5)^4=2}$
24. $\boldsymbol{\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}}$
25. $\boldsymbol{(x-a)x(x+a)(x+2a)=3a^4}$
26. $\boldsymbol{(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35}$
27. $\boldsymbol{x^2+\frac{4}{x^2}-8\left(x-\frac{2}{x}\right)-4=0}$
28. $\boldsymbol{4x^4+6x^3-10x^2-9x+9=0}$
29. $\boldsymbol{\frac{(x+1)^5}{x^5+1}=\frac{81}{11}}$
30. $\boldsymbol{(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x}$
31. $\boldsymbol{x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11}$
32. $\boldsymbol{(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0}$

33. $\boldsymbol{x^4+4x-1=0}$

34. $\boldsymbol{x^4-4x^3-1=0}$

35. $\boldsymbol{x^4-2x^2-400x=9999}$

36. $\boldsymbol{(x^3-2x)-(x^2+2)a-2a^2x=0}$

37. $\boldsymbol{(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0}$

38. ដោះស្រាយសមីការ $\boldsymbol{x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0}$ ដោយដឹងថាអង្គខាងឆ្វេងអាចដាក់ជាផលគុណដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បាន។

39. សមីការ $\boldsymbol{x^3+ax^2+bx+c=0}$ ដែល $\boldsymbol{a,b,c}$ ជាចំនួនគត់ មានរឹសសនិទានមួយ តាងដោយ $\boldsymbol{x_1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\boldsymbol{x_1}$ ជាចំនួនគត់ និងថា $\boldsymbol{c}$ ចែកដាច់នឹង $\boldsymbol{x_1}$ ។

40. សមីការ $\boldsymbol{x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0}$ ដែល $\boldsymbol{a,b,c,d}$ ជាចំនួនគត់ មានរឹសសនិទានមួយ តាងដោយ $\boldsymbol{x_1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\boldsymbol{x_1}$ ជាចំនួនគត់ និងថា d ចែកដាច់នឹង x_1 ។

41. សន្មតថា x_1,x_2,x_3 ជារឹសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា $x_1+x_2+x_3=-b/a\,, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a\,, x_1x_2x_3=-d/a$ ។

42. គេអោយសមីការ $x^3+px+q=0$ ។ ចូរគណនាផលបូកការេនៃរឹសរបស់វា។

43*. ដោះស្រាយសមីការ $x^3+3x-3=0$ ។

ចូររករឹសសនិទាននៃសមីការ

44. $\boldsymbol{x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0}$

45. $\boldsymbol{x^4-7x^3+5x^2+4x+12=0}$

46. $\boldsymbol{x^4+x^3-5x-5=0}$

47. $\boldsymbol{x^4+x^3-1=0}$

48. $\boldsymbol{6x^4-x^3+5x^2-x-1=0}$

ដោះស្រាយសមីការ

49. $\boldsymbol{\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6}$

50. $\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1}$

51. $\boldsymbol{\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6}$

52. $\boldsymbol{\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}}$

53. $\boldsymbol{\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a}$

54. $\boldsymbol{\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1}$

55. $\boldsymbol{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1}$

56. $\boldsymbol{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5}$

57. $\boldsymbol{\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4}$

58. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$

59. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

60. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$

61. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$

62. $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$

63. $x+12\sqrt{x}-64=0$

64. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$

65. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$

66. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

67. $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$

68. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

69. $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}=3$

70. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$

71. $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$

72. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$

73*. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$

74. $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$

75. $\sqrt{2x-1}-x+a=0$

76. $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x$

77. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$

78. $\sqrt{x+\sqrt{a^2+2a-3}}+\sqrt{x+a+\sqrt{2-2a+2a^2-a^3}}=a\sqrt{1-x}$

79. $(x-1)^2+(y+5)^2=0$

80. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

81. $(x+y-a)^2+(y-1)^2+(x+3)^2=0$

82*. (ឡូវគី ១៩៩៨)

តាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត កំនត់ដោយ $a_1=t$ និង $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ តើតំលៃរបស់ t ខុសៗគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន ដែល $a_{1998}=0$?

83*. (MOSP ២០០១)

ចូរកំនត់គ្រប់ត្រីធាតុនៃចំនួនពិត $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ ដែល

$$\boldsymbol{a^2-2b^2=1,\ 2b^2-3c^2=1}\ \text{និង}\ \boldsymbol{ab+bc+ca=1}\text{។}$$

84*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{\boldsymbol{x^2-p}}+\ \boldsymbol{2\sqrt{x^2-1}=x}$ ដែល $\boldsymbol{p}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនិងជាចំនួនពិត។

85*. (អន្តរជាតិឡជ័លីស ១៩៦៧)

គេអោយសមីការ

$$\boldsymbol{x^5+5\lambda x^4-x^3+(\lambda\alpha-4)x^2-(8\lambda+3)x+\lambda\alpha-2=0}$$

ក) ចូរកំនត់ $\boldsymbol{\alpha}$ ដើម្បីអោយសមីការមានរឺសដែលមិនអាស្រ័យនឹង $\boldsymbol{\lambda}$ តែមួយគត់។

ខ) ចូរកំនត់ $\boldsymbol{\alpha}$ ដើម្បីអោយសមីការមានរឺសដែលមិនអាស្រ័យនឹង $\boldsymbol{\lambda}$ តែពីរគត់។

86*. (អន្តរជាតិ ១៩៥៩)

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

ខ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

គ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

87*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

88*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}=x$$

(មានរ៉ាឌីកាល់ចំនួន n ដង)

89. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=a,$$

90. ដោះស្រាយសមីការ $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5;\ \ a\neq b$ ។

91. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមចំពោះ $x\geq -1$

$$2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

92. គេអោយសមីការ $x^2-3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}$ (*) ដែលក្នុងនោះ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង x ជាអញ្ញាត។

ក) ដោះស្រាយសមីការករណី $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ខ) ចូរកំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយ សមីការ(*) មានរឺសចំនួនមួយ។

93. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$$

94. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2+2}=\frac{2}{5}$$

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

95. $\begin{cases}x^2-xy+3y^2+2x-5y-4=0\\x+2y=4\end{cases}$

96. $\begin{cases}2xy-y^2+5x+20=0\\3x+2y-3=0\end{cases}$

97. $\begin{cases}x^2-4y^2=200\\x+2y=100\end{cases}$

98. $\begin{cases}x^2+9y^2+6xy-6x-18y-40=0\\x+30=2y\end{cases}$

99. $\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}$

100. $\begin{cases}x-y=5\\xy=-4\end{cases}$

101. $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x+y=4\end{cases}$

102. $\begin{cases}x^4+y^4=17\\x+y=3\end{cases}$

103. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13\\\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$

104. $\begin{cases}x^3+y^3=7\\x+y=1\end{cases}$

105. $\begin{cases}x^5+y^5=275\\x+y=5\end{cases}$

106. $\begin{cases}x^3-y^3=63\\xy=4\end{cases}$

107. $\begin{cases}x+y+xy=-11\\x^2+y^2+xy=13\end{cases}$

108. $\begin{cases}x^2y-xy^2=30\\x+xy-y=13\end{cases}$

109. $\begin{cases}(x+0,2)^2+(y+0,3)^2=1\\x+y=0,9\end{cases}$

110. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{(x+y)x}{y}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

111. $\begin{cases}x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30\\x^2y+xy+x+y+xy^2=11\end{cases}$

112. $\begin{cases} 2x^2 + xy - 45y^2 = 0 \\ 2x + 9y^2 = 4 \end{cases}$

113. $\begin{cases} x^2 - 5xy = 16 \\ 2xy + y^2 = 3 \end{cases}$

114. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ (x+y)^2 - \frac{1}{2}y^2 = 7 \end{cases}$

115. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10 \\ x^2y - y^3 = -3 \end{cases}$

116. $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$

117. $\begin{cases} y^2(x^2 - 3) + xy + 1 = 0 \\ y^2(3x^2 - 6) + xy + 2 = 0 \end{cases}$

118. $\begin{cases} \frac{x}{y}(x + y - 2) = \frac{2}{3} \\ \frac{y}{x}(x + y - 1) = 9 \end{cases}$

119. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$

120. $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0 \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2 \end{cases}$

121. $\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2 \\ 2 + 3y^2 = 2xy \end{cases}$

122. $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - 4y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$

123. $\begin{cases} 2u + v + w = 6 \\ 3u + 2v + w = 9 \\ 3u^3 + 2v^3 + w^3 = 27 \end{cases}$

124. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -5 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12 \end{cases}$

125. $\begin{cases} xy + x + y = 7 \\ yz + y + z = -3 \\ xz + x + z = -5 \end{cases}$

126. $\begin{cases} x^2 - yz = 14 \\ y^2 - xz = 28 \\ z^2 - xy = -14 \end{cases}$

127. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 19 \end{cases}$

128. $\begin{cases} xy + xz = 8 \\ yz + xy = 9 \\ xz + yz = -7 \end{cases}$

129. $\begin{cases} \frac{5xy}{x+y} = 1 \\ \frac{7yz}{y+z} = 1 \\ 6xz = x + z \end{cases}$

130. $\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3 \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1 \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$

131. $\begin{cases} y^3 = 9x^2 - 27x + 27 \\ z^3 = 9y^2 - 27y + 27 \\ x^3 = 9z^2 - 27z + 27 \end{cases}$

132. $\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6} \end{cases}$

133. $\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} + \frac{4}{\sqrt[4]{x-y} - \sqrt[4]{x+y}} = \frac{9}{4} \end{cases}$

134. $$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5\\ x=y+1\end{cases}$$

135. $$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3}\\ xy-2x-2y=2\end{cases}$$

136. $$\begin{cases}x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}\\ xy=15\end{cases}$$

137. $$\begin{cases}y\sqrt{x^2+y^2}-2ay-3=0\\ x\sqrt{x^2+y^2}=2ax\end{cases}$$

138. $$\begin{cases}x+y=2\\ xy-z^2=1\end{cases}$$

139. ចូរកំនត់តំលៃ a ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានរឹសតែមួយគត់

$$\begin{cases}\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\\ y=ax+1\end{cases}$$

140*. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{5}{6}z=61\\ x+y+z=79\end{cases}$$

ក) ចូរគណនាផលបូក $\frac{2}{5}y+\frac{z}{2}$; ខ) ក្នុងចំនោមរឹសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់របស់ប្រព័ន្ធ ចូរកំនត់រឹសដែលមានតំលៃ x ធំបំផុត។

141*. (អន្តរជាតិ ១៩៦១)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x+y+z=a\\ x^2+y^2+z^2=b^2\\ xy=z^2\end{cases}$$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែលគេអោយ។ ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌលើ a និង b ដើម្បីអោយចំលើយវិជ្ជមាននិងមានតំលៃខុសគ្នា។

142*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

ដែលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ y ជាចំនួនពិត។

143*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

ដែលមានមេគុណផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

ក) a_{11}, a_{22}, a_{33} ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ខ) មេគុណផ្សេងទៀតអវិជ្ជមានទាំងអស់

គ) សមីការនិមួយៗមានផលបូកមេគុណវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ជាចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ។

144*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

ចូរកំនត់ចំនួនពិត x_1, x_2, x_3, x_4 ដែល

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

145*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៦)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_3 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_3 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

ដែល a_1, a_2, a_3 និង a_4 ជាចំនួនពិតខុសគ្នាពីរៗ។

146*. (អន្តរជាតិ ឡេងលីស១៩៦៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y \\ y^2 + y - 1 = z \\ z^2 + z - 1 = x \end{cases}$$

147. (អន្តរជាតិ ឡេងលីស១៩៦៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}|x+y|+|1-x|=6\\|x+y+1|+|1-y|=4\end{cases}$$

148*. (**អន្តរជាតិ ឡូជ័លីស១៩៦៧**)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=a\\x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2\\\dots\dots\\x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=a^n\end{cases}$$

149. (**អន្តរជាតិ ឡូជ័លីស១៩៦៧**)

តើក្នុងករណីណា ដែលប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}x+y+mz=a\\x+my+z=b\\mx+y+z=c\end{cases}$$

មានចំលើយ? ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌដែលចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធខាងលើ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

150*. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៧**)

គេអោយស្វ៊ីត (c_n) :

$$\begin{aligned}c_1&=a_1+a_2+\cdots+a_8\\c_2&=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2\\&\dots\quad\dots\dots\\c_n&=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n\\&\dots\quad\dots\dots\end{aligned}$$

ដែល $a_1,a_2,\dots,a_8$ ជាចំនួនពិត ដែលមិនសូន្យទាំងអស់គ្នា។ ដោយដឹងថា ក្នុងចំនោម (c_n) មានចំនួនដែលស្មើសូន្យច្រើនរាប់មិនអស់ ចូរកំនត់តំលៃរបស់ n ដើម្បីអោយ $c_n=0$ ។

151*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x^2=2x-y\\y^2=2y-z\\z^2=2z-t\\t^2=2t-x\end{cases}$$

152*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x_1^2+ax_1+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_2\\x_2^2+ax_2+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_3\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\x_{1000}^2+ax_{1000}+\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2=x_1\end{cases}$$

ដែល a ជាចំនួនពិត។

153*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}2x_1-5x_2+3x_3=0\\2x_2-5x_3+3x_4=0\\\quad\dots\dots\dots\dots\dots\\2x_n-5x_1+3x_2=0\end{cases}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ ≥ 3 ។

154*. តាង (x,y,z) ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x=y(4-y)\\y=z(4-z)\\z=x(4-x)\end{cases}$$

ចូរកំនត់តំលៃរបស់ផលបូក $S=x+y+z$ ។

155. (**កាណាដា ១៩៧០**)

ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}x+yz=2\\y+zx=2\\z+xy=2\end{cases}$$

156. (**អន្តរជាតិ ១៩៦៨**)

គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=y\\ay^2+by+c=z\\az^3+bz+c=x\end{cases}$$

ដែលក្នុងនោះ $a\neq 0$ ។ តាង $\Delta=(b-1)^2-4ac$ ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $\Delta<0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានរឹស។

157. ចូរកំនត់ $a\in\mathbb{R}$ ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}x^3-ay^3=\dfrac{1}{2}(a+1)^2\\x^3+ax^2y+xy^2=1\end{cases}$$

មានរឹសផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y=0$

158. ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z & (1)\\y^3+3y^2=x^2-3x+2 & (2)\\y^2+z^2=6z & (3)\\z\leq 3 & (4)\end{cases}$$

159. គេអោយ $a,b,c>0$ ។ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}=c-zx\\\dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}=a-xy\\\dfrac{c}{z}-\dfrac{a}{y}=b-yz\end{cases}$$

160. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}$$

V. វិសមភាព

ចូរបង្ហាញថា

161. $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\dots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$

162. $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<\binom{100}{50}<\frac{2^{100}}{10}$

163. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n\in\mathbb{N}$

164. $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\dots\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$

165. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>1$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}$$

166. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

167. តើមួយណាធំជាង $(1{,}000001)^{1.000.000}$ រឺ 2 ?។

168. តើមួយណាធំជាង $1\,000^{1\,000}$ រឺ 1001^{999} ?។

169. (កាណាដា ១៩៦៩)

តើមួយណាធំជាង $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$ រឺ $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$ ចំពោះ $c\ge 1$?។

170. ផលគុណនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានចំនួនn មានតំលៃស្មើមួយ។ ចូរបង្ហាញថាផលបូករបស់វា មិនមានតំលៃតូចជាង n ទេ។

171. សន្មតថា $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ $(n\in\mathbb{N})$ជាចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នា មានតំលៃធំជាង -1 ។ ចូរបង្ហាញថា $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)\ge 1+x_1+x_2+\dots+x_n$ ។

172. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>6$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$$

173. គេអោយ $f(x)=ax^2+1998x+c$ ដែល $a;c\in\mathbb{Z};|a|<2000;|c|<2000$ ហើយ f មានរឺសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1;x_2$ ។ ចូរបង្ហាញថា $|x_1-x_2|\ge\frac{1}{998}$ ។

174. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,x,y ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a+b=1; ax+by=2; ax^2+by^2=3$$

ចូរបង្ហាញថា $4<ax^3+by^3<4{,}5$

175. គណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right|$$

176. ចូរកំនត់ a,b,c ដើម្បីអោយ$f(x) = ax^2 + bx + c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|f(x)| \le 1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1;1]$ និងដែល $K = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ មានតំលៃធំបំផុត។

177. គេអោយចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ ដែល$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\min_{i \ne j}\left(a_i - a_j\right)^2 \le \frac{1}{100}; \quad \min_{i \ne j}\left|a_i^2 - a_j^2\right| \le \frac{1}{36}$$

178. តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណ ចូរតាង

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

179. គេអោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3\left(ab + bc + ca\right) \le \left(a + b + c\right)^2 < 4\left(ab + bc + ca\right)$$

180. តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2) \le (2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab)$$

181. ដោយដឹងថា $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0; \forall x \in \mathbb{R}; a < b$ ។ ចូរកំនត់ $\min F$ ដែល

$$F = \frac{a+b+c}{b-a}$$

182. (**អន្តរជាតិ ១៩៦១**)

តាង a,b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ដែលមានក្រលាផ្ទៃ S ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}$$

តើពេលណាយើងមានសមភាព?។

183. (**អន្តរជាតិ ឡដ៍លីស១៩៦៧**)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់គូវ៉ិចទ័រ f និង g ស្ថិតក្នុងប្លង់ វិសមភាព

$$af^2 + bfg + cg^2 \ge 0$$

ពិត បើនិងមានតែបើ លក្ខខណ្ឌដូចតទៅនេះត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a \ge 0; c \ge 0; 4ac \ge b^2$។

184. គេអោយចំនួនគត់ $n \ge 2$ និង ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots a_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i<j}\left|a_i-a_j\right| \geq \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|$$

185. (អង្គរជាតិ ២០០០)

គេអោយ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

186. (ឌ្រីស្តីបង)

ចូរបង្ហាញថា

ក) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b គេមាន $a^2+b^2 \geq 2ab$ និង $4ab \leq \left(a+b\right)^2$ វាស្មើគ្នា បើ $a=b$ និង ច្រាសមកវិញ។

ខ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x>0,$ គេមាន $x+\frac{1}{x} \geq 2$។ វាស្មើគ្នា បើ $x=1$ និង ច្រាសមកវិញ។

187. (កាណាដា ១៩៧១)

តាង x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $x+y=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

188. គេអោយ២ចំនួនពិត a,b មិនសូន្យ។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}$$

189. (រុស្ស៊ី ១៩៩៥)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x,y>0$

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}$$

190. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y គេមាន

$$x^2+y^2+1 > x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

191. គេអោយ $x,y,z>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

192. ចូរបង្ហាញថា បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ នោះគេមាន

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \geq 8\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$$

193. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2 - z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} \geq 0$$

ចូរកំនត់ករណីសមភាព។

194. (អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ១៩៩៦)

គេអោយ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

195. (អាមេរិច ១៩៩៧)

គេអោយ $a, b, c > 0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

196. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៦)

គេអោយ $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

197. (វិសមភាពកូស៊ីស្វាត)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ គេមាន

$$\left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + ... + a_n b_n\right)^2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ វ៉ិចទ័រ $(a_1, ..., a_n)$ និង $(b_1, ..., b_n)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ។

សំគាល់

ក្នុងគណិតវិទ្យា វិសមភាពកូស៊ី–ស្វាត អ្នកខ្លះហៅថាវិសមភាពស្វាត វិសមភាពកូស៊ី រឺក៏ វិសមភាពកូស៊ី–ប៊ុនយ៉ាកូវស្គី–ស្វាត (គឺហៅតាមឈ្មោះ អូគុស្តាំង លួីសកូស៊ី(Augustin Louis Cauchy), វិចទ័រ យ៉ាកូលេវិច ប៊ុនយ៉ាកូវស្គី (Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨០៤–១៨៨៩)និង ហ៊ែរម៉ាន អាម៉ានឌុស ស្វាត(Hermann Amandus Schwarz, គណិតវិទូអាល្លឺម៉ង់,១៨៤៣–១៩២១))។

198. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ គេមាន

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

199. (អាមេរិច ១៩៧៨)

គេអោយចំនួនពិត a,b,c,d,e ដែល

$$a+b+c+d+e=8 \quad \text{និង}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$$

ចូរកំនត់តំលៃធំបំផុតរបស់ e។

200. (អូស្រ្តាលី ១៩៩៣)

គេអោយចំនួនគត់ $n>1$, ចំនួនពិត $a_1,a_2,...a_n>0$ និង

$$s=a_1+a_2+...+a_n$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}\geq n\left(n-1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n}{\left(n-1\right)}$$

201. (ចិន ១៩៨៧ ១៩៨៨)

ក) គេអោយ $a_1,a_2,a_3>0$ ដែល $\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2>2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)$។

ចូរបង្ហាញថា a_1,a_2,a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ខ) គេអោយចំនួនគត់ $n\geq 3$ និង $a_1,a_2,...a_n>0$ ដែល

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)^2>\left(n-1\right)\left(a_1^4+a_2^4+...+a_n^4\right)$$

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ i,j,k ខុសគ្នាពីរៗ ចំនួន a_i,a_j,a_k ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

202. គេអោយ $a_1,a_2,...a_n>0$។ តាង $S_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$ និង $S_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_2-a_k^2}{S_1-a_k}\geq S_1$$

203. (សឹង្ហបូរី ២០០០)

គេអោយ $a,b,c,d>0$ ដែល $a^2+b^2=\left(c^2+d^2\right)^3$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\geq 1$$

204. គេអោយ $x,y,z>1$ ដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

205. (ឥណ្ឌា ២០០១)

គេអោយ $x,y,z>0$ ដែល $xyz \geq xy+yz+zx$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$xyz \geq 3\left(x+y+z\right)$$

206. គេអោយ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\max\left(a,b,c\right) \geq \sqrt{3}$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ $a,b,c>0$ និង $a+b+c=abc$ ចូរតាង

$$a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$$

ដូច្នេះ x,y,z អាចចាត់ទុកជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណស្រួចបាន មានន័យថា $x,y,z \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ និង $x+y+z=\pi$ ។

207. (អន្តរជាតិ ១៩៩៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។

ក) ចូរកំនត់ចំនួនថេរ C តូចបំផុត ដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1,x_2,\cdots,x_n \geq 0$ គេមាន

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\left(x_i^2+x_j^2\right) \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

ខ) ចំពោះចំនួនថេរ C នេះ ចូរកំនត់ករណីសមភាព។

208. គេអោយចំនួនពិត x,y,z,t ដែល

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=1 \end{cases}$$

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃ $P=xy+yz+zt+tx$ ។

209. (វិសមភាពតំរៀប)

គេអោយ $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ និង $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត កើនពីរ។

ដូច្នេះ ក្នុងចំនោមចំលាស់ σ នៃ $\left\{1,2,\ldots,n\right\}$ ផលបូក $S_\sigma=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ មានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma\left(i\right)=i$ និង តូចបំផុតពេល $\sigma\left(i\right)=n-i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

មានន័យថា S_σ មានតំលៃធំបំផុតពេល ស្វ៊ីតទាំង២រៀបតាមលំដាប់ដូចគ្នា ហើយ តូចបំផុតបើរៀបតាមលំដាប់ផ្ទុយគ្នា។

210. (អន្តរជាតិ ១៩៧៤)

គេអោយចំនួនពិត $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ និង $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n$ ។ តាង $\left(z_1, z_2, ..., z_n\right)$ ជាចំលាស់នៃ $\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - z_i\right)^2$

211. ចូរគណនា តំលៃតូចបំផុតរបស់ $f\left(x\right) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$ ចំពោះ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ។

212. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b, c \ge 0$ គេមាន

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2b + b^2c + c^2a \ge 3abc$$

213. (អន្តរជាតិ ១៩៧៨)

គេអោយ $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ មិនសូន្យ ហើយមានតួខុសគ្នា២ៗ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ គេមាន

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

214. (ចិន ១៩៨៤/១៩៨៥)

គេអោយ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \ge a_1 + a_2 + ... + a_n$$

215. គេអោយចំនួនមិនអវិជ្ជមាន p, q, x, y, z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{2000}}{py + qz} + \frac{y^{2000}}{pz + qx} + \frac{z^{2000}}{px + qy} \ge \frac{x^{1999} + y^{1999} + z^{1999}}{p + q}$$

216. (វិសមភាព Chebyshev)

ចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីតកើននៃចំនួនពិតពីរ តាងដោយ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ គេមាន

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}$$

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ នោះ

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}$$

Pafnuty Lvovich Chebyshev
គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨២១–១៨៩៤

217. (វិសមភាពណេសប៊ីត)
គេអោយ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$
218. គេអោយ $a,b,c,d\geq 0$ ដែល $ab+bc+cd+da=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$
219. គេអោយ $a,b,c>0$ និង $n\in\mathbb{N}*$។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$
220. គេអោយ $x,y,z>0$ ដែល $xyz=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$
221. (វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-ធរណីមាត្រ រឺវិសមភាពកូស៊ី)
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\ldots,a_n$ រឺសូន្យ គេមាន
$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$
ដោយសមភាពកើតមាន ទាល់តែ និងមានតែ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ តែប៉ុណ្ណោះ។
222. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)
តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$
223. (អន្តរជាតិ ឡុងដ៍លីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\geq (n!)^{\frac{2}{n}}$$

(n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន) ហើយបង្ហាញថាសមភាពអាចតែក្នុងករណី $n=1$ មួយតែប៉ុណ្ណោះ។

224. (អន្តរជាតិ ឡេដ៍លីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

225. (អន្តរជាតិ ឡេដ៍លីស ១៩៦៧)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$x_1x_2\dots x_k(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1})\leq x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_k^{n+k-1}$$

ដែល $x_i>0\ (i=1,2,\dots,k), k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}$ ។

226. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1,x_2,..,x_n>0$ គេមាន

$$\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$$

227. (រុស្ស៊ី ២០០០)

គេអោយ $x,y,z\in\mathbb{R}+*$ ដែល $xyz=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2\left(xy+yz+zx\right)$$

228. (សូវៀត ១៩៦២)

គេអោយ $a,b,c,d>0$ ដែល $abcd=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq 10$$

229. គេអោយ $a,b,c\geq 0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+b+c\right)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

230. គេអោយ $a,b,c>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc\geq\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)$$

231. គេអោយ $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}+*$ ដែល $\sum_{k=1}^{n}a_k=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n}a_k\left(1-a_k\right)\leq\frac{\left(n-1\right)^n}{n^{2n}}$$

232. (អូទ្រីស ២០០០)

គេអោយចំនួនពិត a,b ដែល $a\neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$$

233. ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ តាង $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ និង $V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតកើន ហើយស៊ីត (V_n) ជាស៊ីតចុះ។

234. (ស្វៀត ១៩៦៩)

គេអោយចំនួនគត់ $n\geq 3$ និង $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}_+^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}$$

235. (ចិន ១៩៨៩/១៩៩០)

គេអោយ $a_1,a_2,...,a_n>0$ ដែល $a_1a_2...a_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{i=1}^{n}\left(2+a_i\right)\geq 3^n$$

236. តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

បើ (ក) $0<a,b\leq 1$ រឺក៏ (ខ) $ab\geq 3$។

237. គេអោយ $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}>0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{1+x_i}=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{i=1}^{n+1}x_i\geq n^{n+1}$$

238. គេអោយចំនួនគត់ $n>1$, $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}_+^*$ និង $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}_+$ ។ តាង $s=\sum_{k=1}^{n}x_k$ ។ ចូរកំនត់ចំនួនថេរធំបំផុត $C(n)$ ដែល $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k\left(s-x_k\right)}{x_k}\geq C(n)\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}$ ។

239. តើគេត្រូវចែកប៊ូលចំនួន n ទៅក្នុង ប្រអប់ចំនួន k យ៉ាងម៉េច ដើម្បីអោយ ផលបូកនៃចំនួនបន្សំប៊ូលពីរៗក្នុងប្រអប់និមួយៗ បូកចូលគ្នានឹងប្រអប់ទាំងអស់ផ្សេងទៀត មានចំនួនតិចបំផុត?។

240. គេអោយ $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 64$$

241. (រូម៉ានី ១៩៩៧)

គេអោយ ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និង $x_1,x_2,...,x_n>0$ ដែល $x_1x_2...x_n=1$ ។

ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតរបស់

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_i^3+x_j^6}$$

242. គេអោយ $a,b,c,d\ge 0$ ដែល $a+b+c+d=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc+bcd+cda+dab\le\frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

243. គេអោយពហុធាដឺក្រេទី $n\ge 1$ មានមេគុណវិជ្ជមាន និង $x_1,x_2,..,x_n\in\mathbb{R}+*$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left[P\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]^2+\left[P\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\right]^2+...+\left[P\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^n\ge n\left[P\left(1\right)\right]^2$$

244. គេអោយ $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}+*$ ដែល $a_1+a_2+...+a_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{n^{n-3}}\frac{1}{a_1a_2...a_n}\ge n^2\left(n-1\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

245. គេអោយ៤ចំនុច A,B,C,D ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែរមួយ មានកាំរង្វាស់ ១ ដែល

$$AB.AC.AD.BC.BD.CD=\frac{2^9}{3^3}$$

ចូរបង្ហាញថា ចតុមុខ $ABCD$ ជាចតុមុខនិយ័ត។

246. គេអោយ $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}+*$ ដែល $a_1+a_2+...+a_n<1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1a_2....a_n\left(1-a_1-a_2-...-a_n\right)}{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(1-a_1\right)\left(1-a_2\right)...\left(1-a_n\right)}\le\frac{1}{n^{n+1}}$$

247. **(អាមេរិចសតលីស ២០០២)**

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតរបស់

$$S=\left(1-x_1\right)\left(1-y_1\right)+\left(1-x_2\right)\left(1-y_2\right)$$

បើ $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=c^2$ ។

248. **(អន្តរជាតិ ១៩៩៥)**

តាង a,b,c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(c+a\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}\ge\frac{3}{2}$$

249. **(អន្តរជាតិ ២០០១)**

តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

250. តាង a,b,c ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(ab+bc+ca-1\right)^2 \le \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)$$

251. (អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង x,y,z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $x+y+z=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}$$

252. គេអោយចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \ge 2\left(1+\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

253. គេអោយចំនួនពិតបួនផ្សេងគ្នា a,b,c,d ដែល

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4;\quad ac=bd$$

ចូរគណនាតំលៃធំបំផុតនៃ

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$$

254. គេអោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រ ស្មើ 2 ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{52}{27} \le a^2+b^2+c^2+2abc < 2$$

255. ក) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p,q ដែល $p+q=1$ គេមាន $pa+qb \ge a^p b^q$ ចំពោះគ្រប់ $a,b>0$។

ខ) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p,q ដែល $p+q=1$ គេមាន $px+qy \ge x^p y^q$ ចំពោះគ្រប់ $x,y>0$។

គ) **(វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-ធរណីមាត្រមានមេគុណ)**

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n>0$ ដែល $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ គេមាន

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n \ge x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

ចំពោះគ្រប់ $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$។

ឃ) **(វិសមភាពហុលឌ័រ)**

គេអោយ $p,q\in\mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ និង បណ្តាចំនួនពិត $a_1,a_2,\cdots,a_n$ និង $b_1,b_2,\cdots,b_n$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|b_i\right|^q\right)^{1/q}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p\right)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}\left(b_1^p, b_2^p, \cdots, b_n^p\right)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយ បណ្តា $a_i b_i$ សុទ្ធតែវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់ រឺបើមិនអញ្ចឹង សុទ្ធតែអវិជ្ជមានរឺសូន្យទាំងអស់។

256. (វិសមភាពមិនកូវស្គី)

តាង $p \in \left[1; +\infty\right[$ ហើយ $x_1, \cdots, x_n$ និង $y_1, \cdots, y_n$ ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\left(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p\right)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{v}\left(b_1^p, b_2^p, \cdots, b_n^p\right)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ហើយមានទិសដៅដូចគ្នា។

257. គេអោយ $x, y, z > 0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{4/3}}{x^{4/3} + \left(x^2 + y^2\right)^{1/3}\left(x + z\right)^{2/3}} + \frac{y^{4/3}}{y^{4/3} + \left(y^2 + z^2\right)^{1/3}\left(y + x\right)^{2/3}}$$
$$+ \frac{z^{4/3}}{z^{4/3} + \left(z^2 + x^2\right)^{1/3}\left(z + y\right)^{2/3}} \le 1$$

258. គេអោយចំនួនពិត a, b, c, d។ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់

$$S = \sqrt{\left(a+1\right)^2 + 2\left(b-2\right)^2 + \left(c+3\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(b+1\right)^2 + 2\left(c-2\right)^2 + \left(d+3\right)^2} + \sqrt{\left(c+1\right)^2 + 2\left(d-2\right)^2 + \left(a+3\right)^2}$$
$$+\sqrt{\left(d+1\right)^2 + 2\left(a-2\right)^2 + \left(b+3\right)^2}$$

259. តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ក) ចូរបង្ហាញថា បើ $x + y + z = xyz$ នោះ

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ខ) ចូរបង្ហាញថា បើ $0 < x, y, z < 1$ និង $xy + yz + zx = 1$ នោះ

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

260. (បេឡារុស ១៩៩៩)

គេអោយស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ $x_1, x_2, \ldots$ និង $y_1, y_2, \ldots$ កំនត់ដោយ

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$។ ចូរបង្ហាញថា $2 < x_n y_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n > 1$។

261. តាង $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នាចំនួន n ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ដែល $n \geq 2$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2}$$

ដែល $t_i = \prod_{j \neq i} |x_j - x_i|$ ។

262. យើងយកចំនួនពិតបួននៅក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$ ដោយមិនបាច់រើស។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមានពីរក្នុងចំនោមនោះ តាងដោយ a និង b ដែល

$$\left|a\sqrt{4-b^2} - b\sqrt{4-a^2}\right| \leq 2$$

263. (**វិសមភាពយិនសិន**)

តាង $n \geq 1$ ជាចំនួនគត់ ហើយ f ជាអនុគមន៍ផត លើដែន I។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ គ្រប់ $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ គេមាន

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right)$$
$$\leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \lambda_2 f\left(x_2\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right)$$

ហើយ បើ f ប៉ោងដាច់ខាត នោះកន្សោមខាងលើក្លាយជាសមភាព ពេល

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

យ៉ូហាន យិនសិន

(Johan Jensen)

ឈ្មោះពេញ យ៉ូហាន លុយឌ្វិច វីលាម វ៉ាល់ដឺមែរ យិនសិន

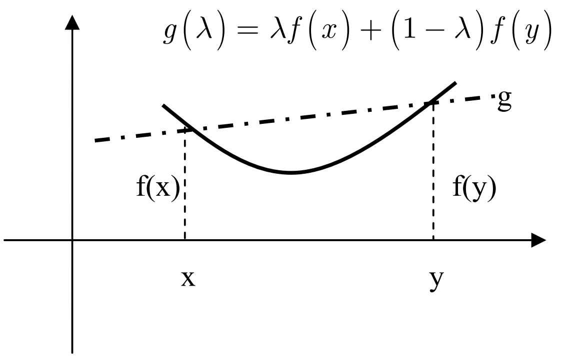
(Johan Ludwig William Valdemar Jensen)

(ឧសភា ១៨៥៩ - កុម្ភៈ ១៩២៥) គណិតវិទូ និង វិស្វករជាតិជាណឺម៉ាក។ គេស្គាល់គាត់ដោយសារវិសមភាពយិនសិន។ ក្នុងឆ្នាំ ១៩១៥ គាត់បានបង្ហាញថា រូបមន្តវិសមភាពរបស់គាត់អាចប្រើបានលើ វិភាគកុំផ្លិច។

និយមន័យ

អនុគមន៍ f មួយ ដែលកំនត់លើ $I \in \mathbb{R}$ ហៅថា ផត បើ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in [0,1]$ និង គ្រប់ $x, y \in I$ គេមាន

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



សំគាល់

ក) ក្នុងនិយមន័យខាងលើ ដែន $E = \{(x, y) \in \mathbf{I} \times \mathbb{R} \,/\, y \ge f(x)\}$ ផត។

ខ) យើងថា f ប៉ោង បើសិនជា $-f$ ផត។

គ) យើងឃើញថា អនុគមន៍ f ផតលើ I ទាល់តែនិងនាំអោយ តង់សង់របស់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នេះ កើន លើ I។ ដូច្នេះ បើ f មានដេរីវេ លើ I នោះ f ផតទាល់តែនិងនាំអោយ f' កើនលើ I។

ឃ) បើ f មានដេរីវេពីរដងលើ I នោះ អនុគមន៍ f ផត ទាល់តែនិងនាំអោយ $f'' \ge 0$ លើ I។

ង) អនុគមន៍មួយផតដាច់ខាតជាប់លើ I មានតំលៃអតិបរមាត្រង់ចំនុចមួយ មិននៅក្នុងI ព្រោះថា បើ f មានតំលៃអតិបរមា នៅត្រង់ចំនុច a ដែលមិននៅចំដែនរបស់ I នោះ គេអាចរកបានអង្កត់ភ្ជាប់រវាង $(a-\varepsilon, f(a-\varepsilon))$ និង $(a+\varepsilon, f(a+\varepsilon))$ ដែលមិននៅខាងលើ ខ្សែកោងរបស់ f។

264. **និយមន័យ- គេអោយ ចំនួនគត់ $n \ge 2$ បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត $a_1, a_2, \cdots, a_n$ និង បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$។ យើងកំនត់អនុគមន៍ M លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $M(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$ ។ គេហៅ $M(\alpha)$ ថា មធ្យមលំដាប់ α នៃបណ្តាចំនួន a_i ផ្សំនឹងមេគុណ λ_i។**

ទ្រឹស្តីបទវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ α

គេអោយ $a_1,\cdots,a_n>0$ មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ និង $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $M(\alpha)$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ មានន័យថា
ចំពោះគ្រប់ $a_1,\cdots,a_n>0$ និង $\alpha<\beta$ គេមាន $M(\alpha)\le M(\beta)$
ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1=a_2=\cdots=a_n$។

265. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $a_1,\cdots,a_n>0$ គេមាន

$$\min\{a_1,\cdots,a_n\}\le M(-1)\le M(0)$$
$$\le M(1)\le M(2)\le \max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

រឺ

$$\min\{a_1,\cdots,a_n\}\le \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$\le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}\le\max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

ហើយសមភាពកើតមាន ពេល $a_1=\cdots=a_n$។

266. គេអោយចំនួនពិត a,b,c វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $a+b+c=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\ge\frac{100}{3}$$

267. (កូរ៉េ ១៩៩៨)

គេអោយ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=abc$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$$

268. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a,b,c>0$ គេមាន

$$\frac{(a+2b+3c)}{a^2+2b^2+3c^2}\le 6$$

269. គេអោយ $a,b\ge 0$ និង $p,q>1$ ដែល $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$$

270. ចូរកំនត់ចំនួនថេរ M តូចបំផុត ដែល ចំពោះគ្រប់ $a,b>0$ គេមាន

$$a^{1/3}+b^{1/3}\le M\left(a+b\right)^{1/3}$$

271. គេអោយ $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\ge\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

272. (អូទ្រីស ២០០០)

គេអោយ $a,b>0$ និង $n\in\mathbb{Z}$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^{n}+\left(1+\frac{b}{a}\right)^{n}\ge 2^{n+1}$$

273. (អន្តរជាតិ ២០០១)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\lambda\ge 8$ និង $a,b,c>0$ គេមាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\ge\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

274. (អាមេរិច ១៩៨០)

គេអោយ $a,b,c\in\left[0,1\right]$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\le 1$$

275. គេអោយចំនួនគត់ $n\ge 1$។ តាង $\alpha,t\in\left[1;+\infty\right[$ និង $\beta\in\mathbb{R}^{+*}$។

តាង $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{R}^{+*}$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^{t}\ge n\left(\frac{1}{n^{\alpha}}+n^{\beta}\right)^{t}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$។

276. (អាមេរិច ១៩៧៧)

គេអោយ $0<p\le a,b,c,d,e\le q$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+b+c+d+e\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\le 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{2}$$

277. (ប៉ូឡូញ ១៩៩៤)

គេអោយចំនួនគត់ $n\ge 1$ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ជាចំនួនពិត ដែល $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n$ ។

278. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{1+\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{1/n}}$$

279. (អន្តរជាតិសតលីស ២០០១)

តាង $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិត។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}$$

280. (អៀរឺដង់ ១៩៩៨)

គេអោយ $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ ដែល $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i},\right\}$$

281. គេអោយ $x, y, z \geq 0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$8\left(x^3 + y^3 + z^3\right)^2 \geq 9\left(x^2 + yz\right)\left(y^2 + zx\right)\left(z^2 + xy\right)$$

282. គេអោយចំនួនគត់ $n > 1$ និង $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ ដែល

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

283. (កូរ៉េ ១៩៩៧)

គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$។ ចូរគណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$$

ដែល $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ ហើយ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$។

284. (អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ២០០៤)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right)$$

285. (ហុងគ្រី ១៩៩៦)

តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}$$

286. តាង a_1,a_2,b_1,b_2 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1+a_2=b_1+b_2$ និង $\max\left(a_1,a_2\right)\geq\max\left(b_1,b_2\right)$។ តាង x និង y ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា $x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\geq x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}$។

និយមន័យ: ភាពស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីក្លិច

តាង $P\left(x,y,z\right)$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ x,y,z។ តាង

$$\sum_{\text{cyclic}}P\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)+P\left(y,z,x\right)+P\left(z,x,y\right)$$

$$\sum_{\text{sym}}P\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)+P\left(x,z,y\right)+P\left(y,x,z\right)$$
$$+P\left(y,z,x\right)+P\left(z,x,y\right)+P\left(z,y,x\right)$$

ឧទាហរណ៍

$$\sum_{cyclic}x^3y=x^3y+y^3z+z^3x$$

$$\sum_{\text{sym}}x^3=2\left(x^3+y^3+z^3\right)$$

$$\sum_{\text{sym}}x^2y=x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y$$

$$\sum_{\text{sym}}xyz=6xyz$$

287. (អៀរឡង់ ១៩៩៨)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x,y,z>1$ ដែល $1/x+1/y+1/z=2$ គេមាន

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

288. (វិសមភាពឈួរ)

តាង x,y,z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $r>0$ យើងមាន

$$x^r\left(x-y\right)\left(x-z\right)+y^r\left(y-z\right)\left(y-x\right)+z^r\left(z-x\right)\left(z-y\right)\geq 0$$

$$\sum_{\text{cyclic}} x^r\left(x-y\right)\left(x-z\right)\geq 0$$

រឺ

289. គេអោយ $a,b,c>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)$$
$$\geq 2\left[\left(ab\right)^{3/2}+\left(bc\right)^{3/2}+\left(ca\right)^{3/2}\right]$$

290. តាង $t\in\left(0,3\right]$ ។ ចំពោះគ្រប់ $a,b,c\geq 0$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(3-t\right)+t\left(abc\right)^{2/t}+\sum_{\text{cyclic}} a^2\geq 2\sum_{\text{cyclic}} ab$$

291. (វិសមភាពម្យួរហែដ)

តាង a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 ជាចំនួនពិត ដែល

$$a_1\geq a_2\geq a_3\geq 0;\quad b_1\geq b_2\geq b_3\geq 0$$
$$a_1\geq b_1;\qquad a_1+a_2\geq b_1+b_2$$
$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$$

ករណីនេះ គេថាស៊ុីត $\left(a_1,a_2,a_3\right)$ ម៉ាសូរ ស៊ុីត $\left(b_1,b_2,b_3\right)$។

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z គេមាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}\geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

292. គេអោយ a,b,c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1$$

293. គេអោយ $a,b,c,d>0$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3}{2}\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\geq$$
$$ab\sqrt{cd}+ac\sqrt{bd}+ad\sqrt{bc}+bc\sqrt{da}+bd\sqrt{ca}+cd\sqrt{ab}$$

294. (អៀរ៉ង់ ១៩៩៦)

តាង x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{1}{\left(x+y\right)^2}+\frac{1}{\left(y+z\right)^2}+\frac{1}{\left(z+x\right)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

295. តាង x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xy+yz+zx=1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq\frac{5}{2}$$

296. (អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2b\left(a-b\right)+b^2c\left(b-c\right)+c^2a\left(c-a\right)\geq 0$$

297. ចំពោះគ្រប់ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}$$
$$\geq abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

298. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩០)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c យើងមាន

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3$$

299. គេអោយ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

ក) $\dfrac{b+c}{a^2+bc}+\dfrac{c+a}{b^2+ca}+\dfrac{a+b}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

ខ) $\dfrac{a^2+bc}{b+c}+\dfrac{b^2+ca}{c+a}+\dfrac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$

300. (អៀរឺឡង់ ១៩៩៦)

គេអោយ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(xy+yz+zx\right)\left(\frac{1}{\left(x+y\right)^2}+\frac{1}{\left(y+z\right)^2}+\frac{1}{\left(z+x\right)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

301. (ជប៉ុន ១៩៩៧)

គេអោយ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{\left(b+c-a\right)^2}{\left(b+c\right)^2+a^2}+\frac{\left(c+a-b\right)^2}{\left(c+a\right)^2+b^2}+\frac{\left(a+b-c\right)^2}{\left(a+b\right)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

302. $\boldsymbol{x^3-3x^2-10x+24}>0$

303. $\boldsymbol{x^3+4x^2+5x+2\leq 0}$

304. $\boldsymbol{2x^3-3x^2+7x-3}>0$

305. $\boldsymbol{x^4-3x^3+x^2+3x-2\geq 0}$

306. $\boldsymbol{x^4+6x^3+6x^2+6x+5}<0$

307. $\boldsymbol{3x^4-10x^2+3}>0$

308. $3x^2(x-4)^2 < 32 - 5(x-2)^2$

309. $(x^2-x)^2 + (x^2-x) + 2 \geq 0$

310. $x(x+1)(x+2)(x+3) < 48$

311. $(x+1)^4 > 2(1+x^4)$

312. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 < 0$

313. $\frac{1}{x} < \frac{2}{x-2}$ 314. $\frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1}$

315. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

316. $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-3x+1}{x-3} > 2x - \frac{1}{4x-8}$

317. $\frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$

318. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} > 0$

319. $\frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{2x^2+2x+3}$

320. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}$

321. $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} > \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$

322. $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$ 323. $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} \leq 5$

324. $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)} > \frac{128}{15}$

325. $x^3 - \frac{1}{x^3} \geq 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$

326. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2 + \frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2 < \frac{2x^2+72}{x^2-36}$

327. $|x^3-x| \leq x$ 328. $\frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|$

329. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ 330. $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} > -1$

331. $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ 332. $(1-a)\sqrt{2x+1} < 1$

333. $\sqrt{x+1} > \sqrt{3-x}$ 334. $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}$

335. $\sqrt{24-10x} > 3-4x$

336. $x > \sqrt{1-x}$

337. $x > \sqrt{24-5x}$

338. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

339. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x} > 0$

340. $\sqrt{x^2+x-12} < x$

341. $1-\sqrt{13+3x^2} \le 2x$

342. $\sqrt{x^2+x} > 1-2x$

343. $4-x < \sqrt{x^2-2x}$

344. $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

345. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$

346. $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} > -\frac{1}{3}$

347. $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x} > 4x-2$

348. $\sqrt{x+1}+1 < 4x^2+\sqrt{3x}$

349. $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x} < 1$

350. $2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right) < 3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right)$

351. ចូរបង្ហាញថាពហុធា $P(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$ មានតំលៃវិជ្ជមានចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

352. សន្មតថា $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ និង $Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n, m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, Q(x)\not\equiv 0$ ។ ចូរបង្ហាញថាវិសមភាព $P(x)/Q(x)>0$ និង $P(x)Q(x)>0$ សមមូលគ្នា។

353. ដោយដឹងថា $f(-1)<1, f(1)>-1, f(3)<-4$ ដែល $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ ។ ចូរកំនត់សញ្ញារបស់ a ។

354. (**អន្តរជាតិ ១៩៦០**)

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x+9$$

355. (**អន្តរជាតិ ១៩៦២**)

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

356. ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\sqrt{9x^2+16} \geq 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x}$$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

357*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} x+y \leq 2, \\ x+y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ដែលក្នុងនោះ $z = 2x + 3y$ មានតំលៃធំបំផុត។

358. ចូរកំនត់រឹសគត់ធម្មជាតិរបស់ប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ xy \leq 17 \\ \dfrac{y+1}{x+2} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

359. ចូរកំនត់តំលៃរបស់ a ដែលសំនុំ

$$\{(x;y) | x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x;y) | x - y + a \geq 0\}$$

មានចំនុចតែមួយគត់។ ចូរកំនត់ចំនុចនោះ។

360. ចូរកំនត់$(x;y)$ ដែល

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 12 = 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 60 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

361. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} \sqrt{4-3x} \geq x \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 5 \end{cases}$$

362. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13-y-z) + x(2y+2z-2yz-26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0 & (1) \\ x^3 + x^2(17-y-z) - x(2y+2z+2yz-26) - 3yz + y + z - 2 = 0 & (2) \\ x^2 - 11x + 28 \leq 0 & (3) \end{cases}$$

363. ចូរកំនត់ a ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធខាងក្រោមមានរឹស

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{a+1} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

I. គណនា

គណនា

364. $25^{\log_5 3}$ 365. $e^{\ln \ln 3}$ 366. $\ln ab - \ln|b|$

367. $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$ 368. $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$

369. $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$ 370. $\log_3 5 . \log_4 9 . \log_5 2$

371. $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$ 372. $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

373. ចូរគណនា $\log_{30} 8$ បើ $\log_{30} 3 = c, \log_{30} 5 = d$ ។

374. ចូរគណនា $\log_9 40$ បើ $\log 15 = c, \log_{20} 50 = d$ ។

375. ចូរគណនា $\log(0{,}175)^4$ បើ $\log 196 = c, \log 56 = d$ ។

376. គណនា

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

II. សមភាព

377. ចូរបង្ហាញថា បើ $a = \log_{12} 18 , b = \log_{24} 54$ នោះ $ab + 5(a - b) = 1$ ។

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

378. $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$

379. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34.15^{2x-x^2}$

380. $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$

381. $\left(\sqrt{5\sqrt{2} - 7}\right)^x + 6\left(\sqrt{5\sqrt{2} + 7}\right)^x = 7$

382. $3^{2x^2} - 2.3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$

383. $x^2. 2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2. 2^{x-2}$

384. $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$

385. $x^{\log_x (1-x)^2} = 9$

386. $\log_3(x^2+4x+12)=2$

387. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5$

388. $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3$

389. $\log(x-3)+\log(x+6)=\log 2+\log 5$

390. $\log(x-4)+\log(x+3)=\log(5x+4)$

391. $\ln(x^3+1)-0{,}5\ln(x^2+2x+1)=\ln 3$

392. $\log_5(x-2)+2\log_5(x^3-2)+\log_5(x-2)^{-1}=4$

393. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$

394. $\log_2(x+2)^2+\log_2(x+10)^2=4\log_2 3$

395. $\log_2\dfrac{x-2}{x-1}-1=\log_2\dfrac{3x-7}{3x-1}$

396. $2\log_2\dfrac{x-7}{x-1}+\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=1$

397. $\log_3(5x-2)-2\log_3\sqrt{3x+1}=1-\log_3 4$

398. $\log(3x-2)-2=\dfrac{1}{2}\log(x+2)-\log 50$

399. $\log^2\left(1+\dfrac{4}{x}\right)+\log^2\left(1-\dfrac{4}{x+4}\right)=2\log^2\left(\dfrac{2}{x-1}-1\right)$

400. $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$

401. $\log_2(x-1)-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3}=\log_8(x-a)^3+\log_{1/2}(x-3)$

402. $\log_2(6x^2+25x)=1+\log_2(ax+4a-2)$

403. $\log_3 x\log_4 x\log_5 x=\log_3 x\log_4 x+\log_4 x\log_5 x+\log_5 x\log_3 x$

404. $\left(\log_3\dfrac{3}{x}\right)\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$

405. $\log(10x^2)\log x=1$

406. $\dfrac{\log_2 x-1}{\log_2\dfrac{x}{2}}=2\log_2\sqrt{x}+3-\log_2^2 x$

407. $2\log_9 x+9\log_x 3=10$

408. $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$

409. $\log_x\sqrt{5}+\log_x 5x=\dfrac{9}{4}+\log_x^2\sqrt{5}$

410. $\log(\log x)+\log(\log x^3-2)=0$

411. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) \ = 4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$

412. $\log^2(4-x)+\log(4-x)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\log^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

413. $(x^2\log_x 27)\log_9 x = x+4$

414. $\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0$

415. $\log_{0,5x} x^2-14\log_{16x} x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$

416. $4\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}+2\log_{4x} x^2 = 3\log_{2x} x^3$

417. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right)+\log_3^2 x=1$

418. $\left(\log_{1/\sqrt{1+x}} 10\right)\log(x^2-3x+2)=(\log(x-3))\log_{1/\sqrt{1+x}} 10-2$

419. $\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}+\frac{\log_a x}{\log_a 2}=\frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$

420. $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a}+(\log_{ax} a)\log_{\frac{1}{a}} 2x=0$

421. $\sqrt{1+\log_{0,04} x}+\sqrt{3+\log_{0,2} x}=1$

422. $\sqrt{2-\log_x 9}=-\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$

423. $\log_x(x^2+1)=\sqrt{\log_{\sqrt{x}}\left(x^2(1+x^2)\right)+4}$

424. $\sqrt{\log_2 x}-0,5=\log_2\sqrt{x}$

425. $\log(3^x-2^{4-x}) \ = 2+\frac{1}{4}\log 16-\frac{x}{2}\log 4$

426. $\log_3\left(\log_9 x+\frac{1}{2}+9^x\right)=2x$

427. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0,2$

428. $\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$

429. $\log(6.5^x+25.20^x)=x+\log 5$

430. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_5(2^x-2)^2=2$

431. $x(1-\log 5)=\log(4^x-12)$

432. $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$

433. $\log_3(9^x+9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2.3^x)$

434. $\log_2\left(\frac{8}{2^x} - 1\right) = x - 2$

435. $\log_{1/3}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right) = \log_{1/3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\right)$

436. $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

437. $x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5+\log x}$

438. $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

439. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$

440. $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3$

441. $\left(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}\right)\log(7-x) = 0$

442. $3.2^{\log_x(3x-2)} + 2.3^{\log_x(3x-2)} = 5.6\text{^}\log_{x^2}(3x-2)$

443. $\left|1 - \log_{1/5} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{1/5} x\right|$

444. $\log_4\left(6 + \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - 2\right|\right) = \frac{1}{2} + \log_2\left|\sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - 2\right|\right|$

445. $5^x + 12^x = 13^x$

446. $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$

447. $2^x = 1 - x$

448. $\log_2(4-x) = x - 3$

449. ដោយដឹងថា $x = 9$ ជាឫសមួយនៃសមីការ

$$\log_\pi(x^2 + 15a^2) - \log_\pi(a-2) = \log_\pi \frac{8ax}{a-2}$$

ចូរកំនត់ឫសផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

450. $\begin{cases} \log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 3 \\ \log_{a^6} x + \log_{a^8} y = 4 \end{cases}$

451. $\begin{cases} 2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} = 3 \\ \dfrac{1}{7} . 3^{x\log_3 2 + y\log_3 2 - 2} + 3^{x\log_3 2 - y\log_3 2 - 2} = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

452. $\begin{cases} 10^{1+\log(x+y)} = 50 \\ \log(x-y) + \log(x+y) = 2 - \log 5 \end{cases}$

453. $\begin{cases} x^{\log_x 2} = \log_3(x+y) \\ x^2 + y^2 = 65 \end{cases}$

454. $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

455. $\begin{cases} (3y^2+1)\log_3 x = 1 \\ x^{2y^2+10} = 27 \end{cases}$

456. $\begin{cases} 4^{-y}\log_2 x = 4 \\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4 \end{cases}$

457. $\begin{cases} y + \log x = 1 \\ x^y = 0{,}01 \end{cases}$

458. $\begin{cases} x^{\log y} = 2 \\ xy = 20 \end{cases}$

459. $\begin{cases} 2^x . 8^{-y} = 2\sqrt{2} \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + 0{,}5 = \dfrac{1}{2}\log_3 9y \end{cases}$

460. $\begin{cases} (\log_a(xy) - 2)\left(\log_a \dfrac{4}{9}\right)^{-1} = -1 \\ x + y = 5a \end{cases}$

461. $\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$

462. $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2{,}5 \\ x + y = a^2 + a \end{cases}$

463. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 28 \\ \log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} y = 1{,}5 \end{cases}$

464. $\begin{cases} \log_2 y = \log_4(xy-2) \\ \log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1 \end{cases}$

465. $\begin{cases} 2^{x^2+y} = 4^{\frac{y^2+x}{2}} \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$

466. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}-3y/x} = 16 \\ \sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{12}-\sqrt{8} \end{cases}$

467. $\begin{cases} x+y=4+\sqrt{y^2+2} \\ \log x - 2\log 2 = \log(1+0{,}5y) \end{cases}$

468. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x)+\log_{1/3}(\log_{1/2} y)=1 \\ xy^2=4 \end{cases}$

469. $\begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt[y]{9}=9^{\frac{x}{2y}} \\ \frac{x+3y}{x}=\frac{2x}{y}-4 \end{cases}$

V. វិសមភាព

470. តើមួយណាធំជាង រវាង 2^{300} និង 3^{200} ?

471. ចូរបង្ហាញថា

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n>1$ ។

472. ដោយមិនប្រើតារាង ចូរបង្ហាញថា $\log_4 9 > \log_9 25$ ។

473. គេអោយ $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_1^{x_1}.x_2^{x_2}\ldots x_n^{x_n} \geq (x_1.x_2\ldots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$$

474. (អាមេរិច សតលីស១៩៩៩) គេអោយ $x,y,z>1$។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

475. $\log_{1/5}(2x^2+5x+1)<0$

476. $\log_{1/3}(x^2+2x)>0$

477. $\log_{1/2}(x^2-4x+6)<-2$

478. $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2}<1$

479. $\log_{0{,}25}\frac{35-x^2}{x} \geq -\frac{1}{2}$

480. $\log_5(2x-4)<\log_5(x+3)$

481. $\log_{0{,}1}(x^2+x-2)>\log_{0{,}1}(x+3)$

482. $\log\sqrt{x^2-3x+4}-\log\sqrt{x+1}>0$

483. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \le \log_2(2-x)$

484. $\log_{1/2}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_2(x+1)$

485. $\log(x-2) + \log(27-x) < 2$

486. $\log(x-1) + \log(x-2) < \log(x+2)$

487. $\log_2(2-x) + \log_{1/2}(x-1) > \log_{\sqrt{2}} 3$

488. $\log_{1/5}(2x+5) - \log_{1/5}(16-x^2) \le 1$

489. $\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \log_{1/2}\left(1+\dfrac{x}{4}\right) \ge 1$

490. $\log_7 x - \log_7(2x-5) \le \log_7 2 - \log_7(x-3)$

491. $\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1$

492. $\log_2 x^2 + \log_2(x-1)^2 > 2$

493. $\log^2 x + 3\log x - 4 \ge 0$

494. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$

495. $\log_{1/3} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}$

496. $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{1/2}\dfrac{x^5}{4}\right)^2 - 20\log_2 x + 148 < 0$

497. $(2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 8)(2\log_3^2 x - 3\log_3 x - 6) \ge 3$

498. $(\log_2^2 x + 3\log_2 x + 1)(\log_2^2 x + 3\log_2 x - 3) < 5$

499. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$

500. $2^{2x+1} - 21.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \ge 0$

501. $0{,}1^{x+1} < 0{,}8 + 2.10^x$

502. $2^x + 2^{-x} < 3$

503. $3^{4-3x} - 35.3^{3x-2} + 6 \ge 0$

504. $\dfrac{6}{2^x-1} < 2^x$

505. $3^{\log x+2} < 3^{\log x^2+5} - 2$

506. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log x^2} + 2 > 3.2^{-\log(-x)}$

507. $\log_2(4^x - 5.2^x + 2) > 2$

508. $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

509. $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1)\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$

510. $\log(1 + 2^{x+1}) > \frac{(x\log 2)\log 4}{\log 8} + \log 3$

511. $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}} < 1$

512. $\sqrt{\log_3(9x-3)} \leq \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

513. $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geq 9 - 3^x$

514. $\log_{1/3}(\log_4(x^2 - 5)) > 0$

515. $0,3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$

516. $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3} - x\right) > 0$

517. $\log_{1/2}\left(\sqrt{5-x} - x + 1\right) > -3$

518. $x^{\log_2 x - 2} > \frac{x}{4}$

519. $x^{(\log x)^2 - 3\log x + 1} > 1000$

520. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} \geq 2$

521. $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$

522. $\frac{1}{5 - \log_a x} + \frac{2}{1 + \log_a x} < 1, 0 < a < 1$

523. $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$

524. $\log_a(1-8a^{-x})\geq 2(1-x)$

525. $\log_{\mathrm{x}-3}(x-1)<2$

526. $\log_x(x+2)>2$

527. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$

528. $\log_{x+3}(x^2-x)<1$

529. $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$

530. $\log_{2x+4}(x^2+1)\leq 1$

531. $\log_x\dfrac{15}{1-2x}<-2$

532. $\log_{x^2}(3-2x)>1$

533. $\log_{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}}(x+3)<1$

534. $\log_{\frac{2}{3}|x-2|}2^{1-x^2}\geq 0$

535. $\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2-10x+22)>0$

536. $|x|^{x^2-x-2}<1$

537. $\left|\log_2\dfrac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56}>1$

538. $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$

539. $-\dfrac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}}\geq 0$

540. $\dfrac{\log_{0,5}x+2}{\sqrt{2x-1}}>0$

541. $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)}<0$

542. $25.2^x-10^x+5^x>25$

543. $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} > \frac{(\log_5 x)(2 - \log_3 x)}{\log_3 x}$

544. $\frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}} \le \frac{1}{\log_4(x+3)}$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

545. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)} \ge 0 \\ 2^{x-3} - 31 > 0 \end{cases}$

546. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right)} \ge 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \ge 0 \end{cases}$

547. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

៣. ត្រីកោណមាត្រ

I. គណនា

548. ដោយដឹងថា $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ គណនា ក) $|\sin\alpha-\cos\alpha|$; ខ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

549. ដោយដឹងថា $\tan\alpha+\cot\alpha=p$ គណនា ក) $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$; ខ) $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$

550. គណនា $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ បើ $\tan\alpha=-\frac{3}{4}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ ។

551. គណនា $\cos(70°+\alpha)$ បើ $\sin(40°+\alpha)=b, 0<\alpha<45°$ ។

552. គណនា $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ បើ $\sin\alpha=\frac{12}{13}, \cos\beta=\frac{8}{17}; \sin\gamma=\frac{4}{5};\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ ។

553. គណនា $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha, \tan 3\alpha$ បើ $\cot\alpha=4/3, \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ ។

គណនា

554. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$

555. $\dfrac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$

556. $\dfrac{\sin\alpha-3\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-3\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$

557. $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}$

558. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

559. $\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{6\pi}{7}$

560. អោយ $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4, 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ។ គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ ។

561. មុំស្រួចវិជ្ជមាន α,β,γ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}, \cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)$$

គណនា $\alpha+\beta+\gamma$ ។

គណនាដោយមិនប្រើតារាង

562. $\cos 292°30'$

563. $\operatorname{cosec} 10°-\sqrt{3}\sec 10°$

564. $\dfrac{2\cos 40°-\cos 20°}{\sin 20°}$

565. $-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35°-\dfrac{\sec 5°}{2}-\dfrac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$

566. $\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73° \cos 47°$

567. $\sin 6° - \sin 42° - \sin 66° + \sin 78°$

568. $\dfrac{\cos^2 33° - \cos^2 57°}{\sin 21° - \cos 21°}$

569. $6\cos 40° - 8\cos^3 40°$

570. $\tan^6 20° - 33\tan^4 20° + 27\tan^2 20° - 3$

571. $\cot^2 36° \cot^2 72°$

572. គណនា

$$A = \tan^6 \frac{\pi}{18} + \tan^6 \frac{5\pi}{18} + \tan^6 \frac{7\pi}{18}$$

573. គណនា

$$P = \left(1 - 4\cos^2 \frac{\pi}{1999}\right)\left(1 - 4\cos^2 \frac{2\pi}{1999}\right)\left(1 - 4\cos^2 \frac{3\pi}{1999}\right)\dots\left(1 - 4\cos^2 \frac{999\pi}{1999}\right)$$

II. សមភាព

បង្ហាញសមភាព

574. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$

575. $\dfrac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$

576. អោយ α, β, γ ជាមុំនៃត្រីកោណ។ ចូរបង្ហាញថា $\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ ។

បង្ហាញសមភាព

577. $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

578. $1 - \sin \alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

579. $\dfrac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$

580. $\dfrac{1 - 2\sin^2 \beta}{1 + \sin 2\beta} = \dfrac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta}$

581. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

582. $\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan 2\alpha + \sec 2\alpha$

583. $\dfrac{\sin^4 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^4 \alpha}{\tan 2\alpha - 1} = \cos 2\alpha$

584. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{1-\tan^2\alpha\cot^2\beta}=-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

585. $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$

586. $\cos^4\alpha=\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{3}{8}$

587. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos^2 2\alpha)$

588. $4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1+3\cos^2 2\alpha$

589. $8\left(\sin^8\dfrac{\alpha}{2}+\cos^8\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+6\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

បង្ហាញសមភាព

590. $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 4\alpha}{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}=\tan 2\alpha\cos\alpha$

591. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

592. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$

593. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$

594. $\log_{1/3}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta]=0$

595. $\dfrac{\cot^2 2\alpha-1}{2\cot 2\alpha}-\cos 8\alpha\cot 4\alpha=\sin 8\alpha$

596. $16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=1$

597. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}\cos 2\alpha-\dfrac{1}{16}\cos 4\alpha-\dfrac{1}{32}\cos 6\alpha$

598. $\sin 9\alpha+3\sin 7\alpha+3\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=8\sin 6\alpha\cos^3\alpha$

599. $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$

600. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2};0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$

601. ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$ (ក្នុងនោះមានឫស n ដង)

ចំពោះ $n \in N$

602. គេអោយ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរបង្ហាញថា មានពហុធា T_n មួយ ដែល $\cos nx = T_n(\cos x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ពហុធា T_n នេះ គេហៅថា ពហុធា Tchebychev។

603. គេអោយចំនួនពិត x ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3$$

ចូរបង្ហាញថា $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$

604. ចូរបង្ហាញថា

$$\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$$

III. សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

605. $\cos(1{,}5\pi + x) = \sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x$

606. $2\sin x\cos x + \sqrt{3} - 2\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

607. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

608. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$

609. $2\tan x\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x$

610. $\sin x + \cos^2 x = 1/4$

611. $3\cos x = 2\sin^2 x$

612. $6\cos^2 x + 13\sin x = 12$

613. $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0$

614. $\cos^4\frac{x}{5} + \sin^2\frac{x}{5} = 1$

615. $\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1}\sin^2 x = \sin^2 x$

616. $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$

617. $2\tan x - 2\cot x = 3$

618. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4\tan x$

619. $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$

620. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\tan x\right) = 5$

621. $\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\right)(\sec x + \tan x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x$

622. $\log_2(3\sin x) - \log_2\cos x - \log_2(1-\tan x) - \log_2(1+\tan x) = 1$

623. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x\cos 2x$

624. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$

625. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$

626. $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{2}{\sin x\cos x} - 4 = 0$

627. $\tan 5x + 2\sin 10x = 5\sin 5x$

628. $\cos 2x - 3\sin x + 2 = 0$

629. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2}\sin(5x + 6) = 4$

630. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$

631. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0$

632. $4\cos x\,(2 - 3\sin^2 x) = -(1 + \cos 2x)$

633. $\tan^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$

634. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

635. $\sin x = 5\cos x$

636. $\sin x - \cos x = 0$

637. $\sin x + \cos x = 0$

638. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$

639. $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$

640. $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

641. $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$

642. $\tan x + \sin(\pi + x) = 2\sin^2\frac{x}{2}$

643. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$

644. $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$

645. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

646. $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$

647. $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$

648. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$

649. $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$

650. $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$

651. $\sin^2 x\,(1 + \tan x) = 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3$

652. $\sin^4 x + \sin^3 x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x + \cos^4 x = 1$

653. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

654. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

655. $\sin 5x = \sqrt{3}(1 + \cos 5x)$

656. $\cos x + \sin x = 1$

657. $\sin x + \cos x \cot\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ 658. $\sin|x| \tan 5x = \cos x$

659. $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

660. $\cos 6x + \tan^2 x + \cos 6x \tan^2 x = 1$

661. $\dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = -1$ 662. $\dfrac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$

663. $2\tan 3x - 3\tan 2x = \tan^2 2x \tan 3x$

664. $\cot x + \cot 15° + \cot(x + 25°) = \cot 15° \cot x \cot(x + 25°)$

665. $\sin x + \tan\frac{x}{2} = 0$ 666. $1 + \cos x + \tan\frac{x}{2} = 0$

667. $\tan 2x + \cot x = 4\sin 2x$ 668. $15\cot\frac{x}{2} + 130\sin x = \frac{53}{3}\tan\frac{x}{2}$

669. $\frac{59}{4}\cos x + 6\sin x \tan\frac{x}{2} = 4\tan x \cot\frac{x}{2}$

670. $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$

671. $\cos 3x = -2\cos x$ 672. $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$

673. $\cos 4x = \cos^2 3x$ 674. $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$

675. $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$ 676. $\sin\frac{3}{2}x + 3\sin x = 3\sin\frac{x}{2}$

677. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

678. $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$

679. $a\cos x + b\sin x = c,\ a^2 + b^2 \neq 0$

680. $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ 681. $\sin 4x - \sin 2x = 0$

682. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ 683. $\cos 2x - \cos 6x = 0$

684. $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$ 685. $\sin \pi x^2 = \sin \pi(x^2 + 2x)$

686. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

687. $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$ 688. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

689. $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$ 690. $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0$

691. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

692. $\sin x + 2\sin 2x = -\sin 3x$

693. $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$

694. $\sqrt{2}\sin 10x + \sin 2x = \cos 2x$

695. $\cot x \sin 2x - \cos 2x = 1$

696. $\tan 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$

697. $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right)$

698. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

699. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

700. $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$

701. $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

702. $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$

703. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

704. $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$

705. $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} 2x = \operatorname{cosec} 4x$

706. $\tan 3x - \tan x = 0$

707. $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

708. $\cos 3x \cos 6x$
$= \cos 4x \cos 7x$

709. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

710. $\cos 3x \sin 7x$
$= \cos 2x \sin 8x$

711. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \sin 2x$

712. $\sin\left(\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2}$

713. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

714. $\cos^2 x + \cos^2 2x \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

715. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$

716. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \dfrac{9}{16}$

717. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$

718. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$

719. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$

720. $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

721. $\sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{1}{8}$

722. $8 \cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$

723. $\tan x \tan\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \tan\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

724. $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$

725. $\sin 3x \cos x = 1{,}5 \tan x$

726. $\tan x \cot 3x = 4$

727. $6 \tan x + \dfrac{5}{\tan 3x} = \tan 2x$

728. $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6 \cot x$

729. $2 \sin 3x \sin x + \left(3\sqrt{2} - 1\right) \cos 2x = 3$

730. $2 \cos 4x + 5 \cos 2x - 1 = 2 \sin^2 x$

731. $2 + \cos 4x = 5 \cos 2x + 8 \sin^6 x$

732. $\tan^2 x + \cos 4x = 0$

733. $\tan x + \cot x - \cos 4x = 3$

734. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

735. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(x + \dfrac{5\pi}{4}\right)$

736. $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin x$

737. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sin x \cos x)$

738. $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

739. $\sin \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \cos \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2} \sin \sqrt{x}$

740. $\sin^2 x + 2 \tan^2 x + \dfrac{4}{\sqrt{3}} \tan x - \sin x + \dfrac{11}{12} = 0$

741. $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$

742. $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = 0{,}5\sin^2 2x$

743. $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$

744. $3\sin 3x = \cos 4x - \sin 9x - \cos 10x$

745. $\tan x + \frac{1}{9}\cot x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$

746. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

747. $\sqrt{2\cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4\cos 2x}}$

748. $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2}\cos x = 0$

749. $\sin x + \sqrt{\cos x} = 0$

750. $2\cos x = \sqrt{2 + 2\sin 2x}$

751. $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x$

752. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$

753. $\sqrt{1 + 4\sin x\cos x} = \cos x - \sin x$

754. $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$

755. $\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}} = \sin x + \cos x$

756. $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$

757. $\sqrt{13 - 18\tan x} = 6\tan x - 3$

758. $\sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x} = 2\sin(3x + \pi/4)$

759. $2\sqrt{3\sin x} = \frac{3\tan x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

760. $\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\cot 3x\ + \sin^2 x - \frac{1}{4}} = \sin\frac{3x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

761. $\log_5 \tan x = (\log_5 4)\log_4(3\sin x)$

762. $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\frac{\sin x}{5}}$

763. $2^{\cos 2x} = 3.2^{\cos^2 x} - 4$

764. $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1}$

765. $x^{3\sin 2x+2} = \sqrt{x}$

766. តើសមីការ $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$ និងសមីការ

$$1 + \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 0$$

ដូចគ្នាដែររឺទេ?

767. ចូរកំនត់តំលៃ p ដើម្បីអោយសមីការ $\sqrt{p}\cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$ មានចំលើយ។

768. ចូរកំនត់តំលៃ a, b ដើម្បីអោយសមីការខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ x

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

769. $\begin{cases} x - y = 6{,}5\pi \\ 3\cos^2 x - 12\cos y = -4 \end{cases}$

770. $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$

771. $\begin{cases} x + y = \pi/4 \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$

772. $\begin{cases} \sin 3x \cos 2y = 2^a - \cos 3x \sin 2y \\ \cos(x - y) = 0{,}5 \end{cases}$

773. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

774. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 \\ \cos x \cos y = 0{,}5 \end{cases}$

775. $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ 3\tan x = \tan y \end{cases}$

776. $\begin{cases} \tan x - 2\sin y = -2 \\ 5\tan x + 2\sin y = -4 \end{cases}$

777. $\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y\\ \cos 2x=0\end{cases}$

778. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\cos y=\dfrac{a+3}{3}\\ \sin x\cos y=-\dfrac{a}{3}\end{cases}$

779. $\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}-\tan y=2a+2\\ \tan y+(a^2+2a)\cos x=0\end{cases}$

780. $\begin{cases}\sin^2(-2x)-\left(3-\sqrt{2}\right)\tan 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\\ \left(3-\sqrt{2}\right)\sin(-2x)+\tan^2 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\end{cases}$

781. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z=m^2\\ \tan^3 x+\tan^3 y+\tan^3 z=m^3\end{cases}$$

V. វិសមភាព

782. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $0\le x\le\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ គេមាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>1$$

783. គេអោយត្រីកោណមិនកែង ABC ។ ចូរបង្ហាញថា

$3\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-5(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C)\le 9+\tan^2 B\tan^2 C+$
$\tan^2 C\tan^2 A$

784. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}>\sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$$

785. គេអោយ $2n$ ចំនួនពិត $x_1;x_2;\dots;x_{2n}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ចូរកំនត់តំលៃតូចបំផុតនៃ $n\in\mathbb{N}^*$ ដែល

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\right)=1800$$

786. គណនាតំលៃធំបំផុតនៃ

$$T=\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

ដែល A,B,C ជាមុំបីនៃត្រីកោណមួយ។

787. តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងចំនួនពិត x ដែល $0<(n+1)x<\pi/2$ ចូរបង្ហាញថា

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x)<\tan nx\sin x$$

788. គេអោយ A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right)<4\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

789. តាង A,B,C ជាមុំនៃត្រីកោណ ABC ។ គណនាតំលៃធំបំផុតនៃ $\sin C$ បើ

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=m, \qquad m>\frac{1}{2}$$

790. គេអោយ អនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\cot^4 x$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(\sin x)+f(\cos x)\geq 196$ ។

791. គេអោយត្រីកោណ ABC មាន $A>B>C$ ។ គណនាតំលៃតូចបំផុតនៃ

$$y=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1$$

VI. វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

792. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$

793. $\cos 2x+5\cos x+3\geq 0$

794. $\tan^2 x+(2-\sqrt{3})\tan x-2\sqrt{3}<0$

795. $\cot^2 x+\cot x\geq 0$

796. $2(\sqrt{2}-1)\sin x-2\cos 2x+2-\sqrt{2}<0$

797. $\cos \pi x+\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

798. $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\frac{3}{8}$

799. $\cos x\cos 2x\cos 3x\leq 0$

800. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$

801. $\sin^6 x+\cos^6 x>\frac{5}{8}$

802. $8\sin^6 x-\cos^6 x>0$

803. $\tan x\tan 3x<-1$

804. $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$

805. $\sin 2x>\sqrt{2}\sin^2 x+(2-\sqrt{2})\cos^2 x, 0<x<2\pi$

806. $|\sin x|>\cos^2 x$

807. $\sqrt{5-2\sin x}\geq 6\sin x-1$

808. $1 - \cos x < \tan x - \sin x$

809. $9^{1+\sin^2 \pi x} + 30.9^{\cos^2 \pi x} \leq 117$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

810. ចូរកំនត់ m ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានរឹសតែមួយគត់

$$\begin{cases}(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x.\cos x - (4m-3)\cos x = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi/4\end{cases}$$

៤. ពហុធា

I. គណនា

811. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P(u^2 - v^2) = P(u+v).P(u-v)$$

ចំពោះគ្រប់ $u, v \in \mathbb{R}$ ។

812. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

813. កំនត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P((x+1)^2) = P(x^2) + 2x + 1$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

814. (កាណាដា ១៩៧០)

គេអោយពហុធា

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

ដែលមានមេគុណ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាចំនួនគត់ ហើយដោយដឹងថាមានចំនួនគត់បួនផ្សេងគ្នា a, b, c និង d ដែល

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$$

ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k មួយដែល $f(k) = 8$ ។

៥. សមីការអនុគមន៍

I. គណនា

815. ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$f(f(x)+1)=1-x$$
$$f\big(f(x)\big)=x$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

816. គេអោយអនុគមន៍$f:\mathbb{N}^*\to\ \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

a) $f(1)=2$
b) ចំពោះគ្រប់ $n>1$

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$$

ចូរកំនត់ $f(n)$ ។

817. គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f\big(xf(y)\big)=x^nf\big(f(y)\big)$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

818. គេអោយថេរចំនួនពិតបី a,b,c ដែលមិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា។ ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

$$af(x^2+yz)+bf(y^2+zx)+cf(z^2+xy)=0$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y,z\in\mathbb{R}$ ។

819. ចូរកំនត់លក្ខខណ្ឌលើចំនួនវិជ្ជមាន p,q ដើម្បីអោយគេអាចរកបាននូវអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ដែល

$$f\big(xf(y)\big)=x^py^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}^+$ ។

820. ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ដែល

$$f(m+19)\ge f(m)+19$$
$$f(m+99)\le f(m)+99$$

ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{Z}$ ។

821. ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f^2(x)+f^2(y)$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

822. ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

1) $f(1)=1$
2) $f(x+y)[f(x)-f(y)]=f(x-y)[f(x)+f(y)]$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{Z}$ ។

823. (**កាណាដា ១៩៦៩**)

តាង f ជាអនុគមន៍មួយដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅនេះ

a) $f(n)$ មានន័យចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ;

b) $f(n)$ ជាចំនួនគត់;

c) $f(2) = 2$;

d) $f(mn) = f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ m និង n ;

e) $f(m) > f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $m > n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(n) = n$ ។

824. គេអោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$0 < 2f^2(xy) \leq f(x)f(y^3) + f(x^3)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$f(1999) > 0$$

ចូរបង្ហាញថា $f(2000) > 0$ ។

១. អនុគមន៍ងាយ

I. គណនា

1. $\frac{1}{2}$. ▲ $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2)^2+c^4-2(ab)^2=(1-c^2)^2+c^4-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2=c^4-2c^2+1-2c^4+2c^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។

2. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **3.** $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ▲ យើងមាន

$$(1+1)^4=2^4=1^4+4.1^3.1+6.1^2.1^2+4.1.1^3+1^4$$
$$(2+1)^4=3^4=2^4+4.2^3.1+6.2^2.1^2+4.2.1^3+1^4$$
$$\ldots$$
$$(n+1)^4=n^4+4.n^3.1+6.n^2.1^2+4.n.1^3+1^4$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះចូលគ្នា យើងទាញបានផលបូកដែលចង់បាន។

4.4 ▲ គុណ S នឹង $(2-1)$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} S &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1 \\ &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1 \\ &= (2^4-1)(2^4+1)\ldots(2^{1024}+1)+1 \\ &\vdots \\ &= (2^{1024}-1)(2^{1024}+1)+1 \\ &= 2^{2048}-1+1=2^{2048} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $S^{1/1024}=4$ ។

5.$(n+1)!-1$ ▲ យើងមាន $k.k!=(k+1)!-k!$ ចំពោះ $k=1,2,3\ldots$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} &1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+(n-1).(n-1)!+n.n! \\ &=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+(n!-(n-1)!)+\big((n+1)!-n!\big) \\ &=(n+1)!-1 \end{aligned}$$

6. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} S.2000! &= \binom{2000}{1}+\binom{2000}{3}+\cdots+\binom{2000}{1997}+\binom{2000}{1999} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2000}\binom{2000}{i}=\frac{1}{2}(1+1)^{2000}=2^{1999} \\ S &= \frac{2^{1999}}{2000!} \end{aligned}$$

7. ▲ សន្មតថា u,v,s,t ជាឫសបួននៃពហុធា

$$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-cx+d$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងទាញបាន

$$u+v+s+t=a; uv+vs+st+tu+us+vt=b; uvs+vst+stu=c, uvst=d$$

ដោយ $u+v+s+t=0$ នោះ $a=0$ ។ ដូច្នេះ $f(x)=x^4+bx^2-cx+d$ ។ តាង

$$S_n=u^n+v^n+s^n+t^n$$

យើងមាន

$$S_1=u+v+s+t=0;$$
$$S_2=u^2+v^2+s^2+t^2=(u+v+s+t)^2-2(uv+vs+st+tu+us+vt)=-2b$$

ដើម្បីគណនា S_3 យើងពិនិត្យករណី២ខាងក្រោម។

- ករណី u,v,s,t សុទ្ធតែខុសពីសូន្យទាំងអស់។ ដូច្នេះ

$$u^3+bu-c+\frac{d}{u}=0;\ \ v^3+bv-c+\frac{d}{v}=0$$
$$s^3+bs-c+\frac{d}{s}=0;\ t^3+bt-c+\frac{d}{t}=0$$
$$\Rightarrow\quad S_3+bS_1-4c+d\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)=0$$
$$\Rightarrow\quad S_3-4c+d\frac{c}{d}=0$$
$$\Rightarrow\quad S_3=3c$$

- ករណីក្នុងចំនោម u,v,s,tមានមួយស្មើសូន្យ។ សន្មតថាជា u ។ ដូច្នេះ $d=0$ ហើយ

$$f(x)=x^4+bx^2-cx=x(x^3+bx-c)$$

ដូច្នេះ v,s,t ជាឬសនៃសមីការ $x^3+bx-c=0$ ។ ដូច្នេះ

$$v^3+bv-c=0;s^3+bs-c=0;t^3+bt-c=0$$
$$\Rightarrow S_3+b(u+v+s+t)-3c=0;$$
$$\Rightarrow S_3=3c$$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន $S_3=3c$ ។

យើងមាន

$$u^4+bu^2-cu+d=0;v^4+bv^2-cv+d=0;$$
$$s^4+bs^2-cs+d=0;t^4+bt^2-ct+d=0$$
$$\Rightarrow S_4+bS_2-cS_1+d=0$$
$$\Rightarrow S_4=2b^2-4d$$

យើងមាន $x^4+bx^2-cx+d=0$ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង x^n យើងទាញបាន

$$x^{n+4}+bx^{n+2}-cx^{n+1}+dx^n=0$$
$$\Rightarrow\quad S_{n+4}+bS_{n+2}-cS_{n+1}+dS_n=0$$

យើងទាញបាន

$$S_5=-bS_3+cS_2+dS_1=-5bc$$
$$S_7=-bS_5+cS_4-dS_3=7c(b^2-d)$$

ដោយ $S_7=0$ នោះ $c=0$ ឬ $b^2=d$ ។

- ករណី $b^2=d$ យើងទាញបាន

$$0\le S_4=2b^2-4d=-2b^2\le 0\ \Rightarrow b=0\ \Rightarrow d=0$$
$$\Rightarrow S_4=0\ \Rightarrow u=v=s=t=0\ \Rightarrow P=0$$

- ករណី $c=0$ នោះ u,v,s,t ជាឬសទាំងបួននៃសមីការ $x^4+bx^2+d=0$ ដូច្នេះវាត្រូវតែ $t=-u$ ឬ $t=-v$ ឬ $t=-s$។ ដូច្នេះ $P=0$ ។

II. សមភាព

8.▲ ចំពោះ $n = 1$ យើងទាញបាន $1^2 = \frac{1.2.3}{6}$ ពិត។ សន្មតថាពិតដល់ k មានន័យថា $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$។ យើងទាញបាន $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$ ។ ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំនើន យើងទាញបានសមមភាពពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ **9.●** ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។ **10.●** ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។ **11.●** ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

12.▲ តាង $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$ ដែល $x, y, z \neq \frac{k\pi}{4}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k។ លក្ខខណ្ឌ $a + b + c = abc$ ក្លាយជា $\tan(x + y + z) = 0$ ។យើងមាន

$$\tan(2x + 2y + 2z) = \frac{2\tan(x+y+z)}{1 - \tan^2(x+y+z)} = 0$$

ដូច្នេះ

$$\tan 2x + \tan 2y + \tan 2z = \tan 2x \tan 2y \tan 2z$$
$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} + \frac{2\tan z}{1-\tan^2 z} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត។

13.▲តាង $k = a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ នោះ

$$p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n = k^n(p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n) = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n(p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n)$$

នាំអោយសមភាពពិត។

III. សមីការ

14. $\{-2; -1; 1\}$. 15. $\{-3; 2\}$. 16. $\{3\}$. 17. $\{1\}$. 18. $\left\{-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. 19. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. 20. $\left\{-\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right\}$. ● តាង $x^2 = y$ ។ 21. $\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. 22.$\{-1; 1\}$. 23. $\{2\}$. ▲ តាង $2x - 3 = y + c$ និង $2x - 5 = y - c$ ។យើងទាញបាន $c = 1$។ ជំនួសចូលសមីការ យើងទាញបាន $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 2$ សមមូលនឹង $y^4 + 6y^2 = 0$។ យើងទាញបាន $y = 0$ នាំអោយ $x = 2$ ។ 24. $\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$. 25.$\left\{-\frac{a(\sqrt{13}+1)}{2}; \frac{a(\sqrt{13}-1)}{2} / a \in \mathbb{R}\right\}$. ● តាង$x^2 + ax = y$ ។ 26. $\left\{-\frac{\sqrt{21}+5}{6}; \frac{\sqrt{21}-5}{6}\right\}$ 27. $\{-\sqrt{2}; 4 - \sqrt{18}; \sqrt{2}; 4 + \sqrt{18}\}$. ● តាង $x - \frac{2}{x} = y$។ សមីការសមមូលនឹង $y^2 - 8y = 0$។ 28. $\left\{-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{7}+1}{4}; \frac{\sqrt{7}-1}{4}; 1\right\}$. ● ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $2x - \frac{3}{x} = y$។ 29. $\{\frac{1}{2}; 2\}$ 30.

$\left\{-1; 9; \frac{5-\sqrt{61}}{2}; \frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$. ● ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $x - \frac{9}{x} = y$ ។ 31. $\left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$. ● ដកអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{10x^2}{x+5}$ យើងទាញបាន $\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2 + 10\frac{x^2}{x+5} - 11 = 0$ ។

32. $\{-\sqrt{7}-1; \sqrt{7}-1\}$. ● បង្រួមសមីការជារាង $\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6\frac{x^2}{x-3} - 16 = 0$ ។

33.$\{-\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}\}$.● បង្រួមសមីការជា $(x^2+1)^2 - 2(x-1)^2 = 0$ ។ 34. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}\right\}$. ● តាង $x = 1/y$ ។ 35.$\{-9; 11\}$. ● បូក $4x^2 + 400x + 1$ ទៅអង្គទាំងពីរនៃសមីការ។ 36. $\{-a; a-\sqrt{a^2+2}; a+\sqrt{a^2+2} | a \in \mathbb{R}\}$. ▲ យើងទាញរក a យើងទាញបាន $a = \frac{x^2-2}{2x}$ រឺ $a = -x$ ។ ទាញរក x យើងទាញបានចំលើយ។ 37. $\{-1-\sqrt{3+a}; -1+\sqrt{3+a}\}$ ចំពោះ $a \in [-3; -1)$; $\{-1-\sqrt{3+a}; -1+\sqrt{3+a}; -1-\sqrt{1+a}; -1+\sqrt{1+a}\}$ ចំពោះ $a \in [-1; \infty)$; គ្មានរឺសចំពោះ $a \in (-\infty; -3)$.▲ ដោះស្រាយរក a ដោយសន្មតថា x ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ : $a^2 - 2(x^2-1)a + x^4 - 6x^2 + 4x = 0$; យើងទាញបាន $a = x^2 + 2x - 2$ រឺ $a = x^2 - 2x$ ។

38.$\left\{\frac{-1-\sqrt{29}}{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{29}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$.▲ យើងសរសេរអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជា $(x^2+ax+c)(x^2+bx+d) = 0$ ដូច្នេះ $x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c+d)x^2 + (bc+ad)x + cd \equiv x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab+c+d=-10 \\ bc+ad=37 \\ cd=-14 \end{cases}$$

ដោយដឹងថា a, b, c, d ជាចំនួនគត់ នោះ ពីសមីការចុងក្រោយគេ យើងទាញបាន $(c; d) = \{(-1; 14); (1; -14); (-2; 7); (2; -7)\}$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(c; d) = (2; -7)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។ យើងទាញបាន $a = -5; b = 1$។ ដូច្នេះសមីការសមមូលនឹង $x^2 - 5x + 2 = 0$ រឺ $x^2 + x - 7 = 0$ ។

39.▲ សន្មតថា $x_1 = p/q$ ដែល $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ និង p និង q ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា។ ដូច្នេះ $\frac{p^3}{q^3} + a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0$ សមមូលនឹង $p(p^2 + apq + bq^2) = -cq^3$ ។ អង្គខាងស្តាំនៃសមភាពនេះចែកដាច់នឹង q ។ អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង q នាំអោយនិងមានតែ $q \equiv 1$ តែប៉ុណ្ណោះ ព្រោះ $p^2 + apq + bq^2$ ចែកមិនដាច់នឹង q ។ ដូច្នេះសមភាពមានរាង $p(p^2 + ap + b) = -c$ យើងទាញបាន c ជាពហុគុណនៃ $p = x_1$។ 40.● ប្រើស្រាយបញ្ជាក់ដូចសំនួរទី 39.។

41.● ប្រើសមភាព $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. 42. $-2p$.

43.● $\left\{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\right\}$. តាង $x = y - 1/y$ ។ សមីការទៅជា $y^3 - \frac{1}{y^3} - 3\left(y - \frac{1}{y}\right) + 3\left(y - \frac{1}{y}\right) - 3 = 0$ រឺ $y^3 - \frac{1}{y^3} - 3 = 0$ ។ តាង $y^3 = t$ យើងទាញបាន $t^2 - 3t - 1 = 0$ ។

44.$\{-5; -1; 1; 3\}$. 45.$\{2; 6\}$. 46.$\{-1\}$. 47. គ្មានរឺសសនិទាន 48.$\{-\frac{1}{3}; 1/2\}$.

49.{6}. ▲ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}\neq 0$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6\\ \sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}=2\end{cases}$$

បូកអង្គទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន $x=6$ ។ **50.** សមីការគ្មានរឹស។ 51.$\{-1\}$. 52.$\{12\}$. 53. $\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2;\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\right\}$ ចំពោះ $a\in(0;1]$ ហើយគ្មានរឹសចំពោះតំលៃ a ផ្សេងទៀត។

54.$\{-6;1\}$. **55.**$\{-1;3\}$. **56.** $\{3\}$. **57.** $\{2\}$ **58.** $\{5\}$. **59.**$\{20\}$. **60.** $\{-4/3\}$. **61.** $\{-1;0\}$. **62.** $\{5\}$. **63.** $\{16\}$. **64.** $\{9\}$. **65.** $\{-3;6\}$. ● តាង $y=\sqrt{x^2-3x+7}$ ។ **66.** $\{-9/2;3\}$. **67.** $\{1\}$. ● តាង $y=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$ ។ **68.** $\{5/3\}$. **69.** $\{5a/3\}$ ចំពោះ $a\neq 0$; $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ ចំពោះ $a=0$ ។

70. $\{1\}$. 71. $\left\{3;9^{\frac{9-\sqrt{97}}{8}}\right\}$. 72. $\left\{5\pm a\sqrt{8-\frac{a^2}{2}}\right\}$ ចំពោះ $a\in[2;2\sqrt{2}]$; គ្មានរឹសចំពោះតំលៃ a ផ្សេងពីនេះ។▲ តាង $u=\sqrt{7-x},v=\sqrt{x-3}$ ។ យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}u+v=a\\ 7-x+x-3=u^2+v^2=4,(u\geq 0,v\geq 0)\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}\\ v_1=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}u_2=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2}\\ v_2=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2}\end{cases}$$

73. $\{3\}$.▲ តាង $\sqrt[4]{x-2}=u\geq 0,\sqrt[4]{4-x}=v\geq 0$ យើងទាញបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}u+v=2\\ u^4+v^4=2\end{cases}$$

លើកសមីការទីមួយជាស្វ័យគុណ៤ និងប្រើសមីការទី២ យើងទាញបាន $uv(2(u+v)^2-uv)=7$ ហើយដោយ $u+v=2$ យើងទាញបាន $(uv)^2-8(uv)+7=0$។ ដូច្នេះ $(uv)_1=1;(uv)_2=7$។ ដូច្នេះយើងទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}u+v=2\\ uv=1\end{cases}\qquad\begin{cases}u+v=2\\ uv=7\end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការទីមួយមានរឹស $u=v=1$ ។ ត្រូវនឹង$x=3$ ។ ប្រព័ន្ធទី២គ្មានរឹស។

74. $\left\{\frac{2a+1}{a-2}\right\}$ ចំពោះ$a\in(-\infty;3]\cup(2;\infty)$; $\emptyset$ចំពោះ$a\in\left(\frac{1}{3};2\right]$.

75. $\{a+1+\sqrt{2a};a+1-\sqrt{2a}\}$ ចំពោះ $a\in[0;1/2]$, $\{a+1+\sqrt{2a}\}$ ចំពោះ $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

76. $(-\infty;0)$ ចំពោះ $a=0$, $\{0;3a/4\}$ ចំពោះ $a\in(0;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

77. $\{a^2+a; a^2-a+1\}$ ចំពោះ $a \in [0;1]$, $\{a^2+a\}$ ចំពោះ $a \in (1;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a \in (-\infty;0)$. **78.** $\{0\}$ ចំពោះ $a=1$, $\emptyset$ ចំពោះ $a \neq 1$. **79.**$\{(1;-5)\}$. **80.** $\{(1;-3)\}$.
81. $\{(-3;1)\}$ចំពោះ $a \in \{-2\}$; $\emptyset$ ចំពោះ $a \notin \{-2\}$.

82.▲ តាង $\mathrm{f}(x)=4x(1-x)=1-(2x-1)^2$ ។ យើងឃើញថា បើ $0 \leq \mathrm{f(x)} \leq 1$ នោះ $0 \leq x \leq 1$។ ដូច្នេះ បើ $\mathrm{a}_{1998}=0$ នោះ ត្រូវតែ $0 \leq t \leq 1$។ អីលូវ យើងយក $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ដែល $\sin\theta=\sqrt{t}$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា ចំពោះគ្រប់ $\phi \in \mathbb{R}$ យើងមាន

$$f(\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\,(1-\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\cos^2\phi=\sin^2 2\phi$$

ដោយ $a_1=\sin^2\theta$ នោះ យើងទាញបាន

$$a_2=\sin^2 2\theta\,, a_3=\sin^2 4\theta\,,\cdots,a_{1998}=\sin^2 2^{1997}\theta$$

ដូច្នេះ $a_{1998}=0$ ទាល់តែនិងនាំអោយ $\sin 2^{1997}\theta=0$ ។ មានន័យថា $\theta=\frac{k\pi}{2^{1997}}$ ចំពោះចំនួនគត់ k ខ្លះ ហើយ តំលៃរបស់ t ដែល $a_{1998}=0$ ស្មើនឹង $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះយើងមាន តំលៃរបស់ t បែបនេះ ចំនួន $2^{1996}+1$ គឺមានតំលៃ $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ចំពោះ $k=0,1,2,\cdots,2^{1996}$ ។

83. ▲ ដោយ $a^2-2b^2=1$ នោះ $a \neq 0$ ។ ដោយ $2b^2-3c^2=1$ នោះ $b \neq 0$ ។ បើ $c=0$ នោះ $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ និង $a=\sqrt{2}$ ។ $(a,b,c)=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ជាចំលើយមួយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។ យើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចំលើយណាផ្សេងទៀតទេ។

យើងសន្មតថា មានចំនួនពិត (a,b,c) ដោយ $abc \neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។ យើងឃើញថា បើ (a,b,c) ជាចំលើយ នោះ $(-a,-b,-c)$ ក៏ជាចំលើយដែរ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានចំនួនវិជ្ជមានពីរក្នុងចំនោម(a,b,c) រឺ $(-a,-b,c)$។ សន្មតថា a,b វិជ្ជមាន។ តាង $a=\cot A\,, b=\cot B$ និង $c=\cot C$ ដោយ $0<A,B<\frac{\pi}{2}, 0<C<\pi$ ។ ដោយ $ab+bc+ca=1$ នោះ

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$
$$\cot C=\frac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}=-\cot(A+B)=\cot(\pi-A-B)$$
$$A+B+C=\pi$$

ដូច្នេះ A,B,C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ។ យើងមាន

$$a^2+1=2(b^2+1)=3(c^2+1)$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{2}{\sin^2 B}=\frac{3}{\sin^2 C}$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$$

តាមច្បាប់ស៊ីនុស យើងទាញបានថា ជ្រុងឈមនឹងមុំ A,B,C មានរង្វាស់ $k,k\sqrt{2},k\sqrt{3}$ រៀងគ្នា ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន k ខ្លះ។ ដូច្នេះត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C នាំអោយ $c=\cot C=0$ ផ្ទុយពីសន្មតដែល $c \neq 0$ ។ ដូច្នេះការសន្មតរបស់យើងខុស ហើយ $(a,b,c)=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ជាចំលើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ។

84. $\left\{\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right\}$ ចំពោះ $\frac{4}{3}\le p\le 2$. ▲ យើងមាន $x\ge 0$។ លើកអង្គទាំងពីរជាការេយើងទាញបាន $5x^2-p-4+4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=x^2$ សមមូលនឹង $4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=(p+4)-4x^2$។ បើ $4x^2\le p+4$ យើងលើកអង្គទាំងពីរនៃសមីការជាការេម្តងទៀត យើងទាញបាន $-16(p+1)x^2+16p=-8(p+4)x^2+(p+4)^2$ សមមូលនឹង $x^2=\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)}$ មានន័យថា $x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$។ ដើម្បីអោយតំលៃនេះជាចំលើយនៃសមីការទាល់តែ $p\le 2$ និង $\frac{(4-p)^2}{4-2p}=4x^2\le p+4$ សមមូលនឹង $\frac{4}{3}\le p\le 2$ ។ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានចំលើយ។

85.▲ យើងសរសេរសមីការដែលអោយជារាង

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2+\lambda(5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha)=0$$

រឺសរបស់សមីការនេះមិនអាស្រ័យនឹង λ នាំអោយនិងបើ វាជារឺសរួមរបស់សមីការ

$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0$ និង $5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha=0$

សមីការទីមួយសមមូលនឹង $(x-2)(x^2+x+1)^2=0$ ហើយមានរឺសផ្សេងគ្នាចំនួនបី $x_1=2;\ x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ ។

ក) ចំពោះ $\alpha=-\frac{64}{5}$ យើងមាន $x_1=2$ ជារឺសតែមួយគត់ ដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ ។

ខ) ចំពោះ $\alpha=-3$ យើងមានរឺសចំនួនពីរដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ គឺ $x_1=\omega$ និង $x_2=\omega^2$ ។

86.▲ លក្ខខណ្ឌ $2x-1\ge 0,\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$ និង $x\ge\sqrt{2x-1}\Rightarrow(x-1)^2\ge 0$ ពិតជានិច្ច។ យើងមាន $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=c\Leftrightarrow c^2=2x+2|x-1|=\begin{cases}2, & 1/2\le x\le 1\\ 4x-2, & x\ge 1\end{cases}$

ក) $c^2=2$។ សមីការមានរឺស $\frac{1}{2}\le x\le 1$ ។

ខ) $c^2=1$។ សមីការគ្មានរឺស។

គ) $c^2=4$។ សមីការទៅជា $4x-2=4,\Rightarrow x=3/2$ ។

87. $\{[5;10]\}$ ▲ យើងមាន

$$x+3-4\sqrt{x-1}=x-1-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4\sqrt{x-1}+4=\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$$
$$x+8-6\sqrt{x-1}=x-1-6\sqrt{x-1}+9=\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$$

ដូច្នេះសមីការទៅជា

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1$$
$$\Rightarrow\quad\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$$

បើ $\sqrt{x-1}\ge 3$ នោះ

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1$$
$$\Rightarrow x=10$$

បើ $\sqrt{x-1}-2\ge 0$ និង $\sqrt{x-1}-3\le 0\Rightarrow 5\le x\le 10$នោះ

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1$$
$$\Rightarrow 1=1$$

បើ $\sqrt{x-1}-2\le 0\Rightarrow x\le 5$ នោះ

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1$$

$$\Rightarrow x = 5$$

88.$\{0;3\}$▲ តាង

$$\begin{gathered} 3x = x + 2x = y_1^2 \\ x + 2y_1 = y_2^2 \\ x + 2y_2 = y_3^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x + 2y_{n-2} = y_{n-1}^2 \\ x + 2y_{n-1} = y_n^2 \end{gathered}$$

ដែល $y_1, y_2, \dots, y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ សមីការដែលអោយមានរាង

$$y_n = x$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $y_1 = x$ ។ សន្មតថា $x > y_1$ ។ ដូច្នេះ $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ ។ មានន័យថា បើ $x > y_1$ នោះ $x > y_n$ ផ្ទុយពីសមីការ $x = y_n$ ។ ដូចគ្នាចំពោះករណី $x < y_1$ ។ ដូច្នេះ $x = y_1$ ។ ដោយ $y_1^2 = 3x$ នោះ $3x = x^2$ យើងទាញបាន $x = 0; x = 3$ ។

89. ▲ សមីការសមមូលនឹង

$$\left|\sqrt{x-4} - 1\right| + \left|\sqrt{x-4} - 2\right| = a$$

តាង $y = \sqrt{x-4} \geq 0$ ។ សមីការទៅជា $|y-1| + |y-2| = a$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $y = 1$ និង $y = 2$ មិនអាច។ ដូច្នេះ $a > 0$ ។

បើ $0 \leq y < 1$ នោះ $1 - y + 2 - y = a; \Rightarrow y = \frac{3-a}{2}$ ។ ដោយ $0 \leq y = \frac{3-a}{2} < 1$ នោះ $1 < a \leq 3$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ។

បើ $1 \leq y \leq 2$ នោះ $y - 1 - y + 2 = a; \Rightarrow a = 1$ ។ $1 \leq y \leq 2$ ត្រូវនឹង $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $y > 2$ នោះ $y - 1 + y - 2 = a; \Rightarrow y = \frac{a+3}{2}$ ។ $y > 2 \Rightarrow a > 1$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$

ជាសរុប

បើ $a < 1$ សមីការគ្មានរឹស។

បើ $a = 1$ សមីការមានរឹស $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $1 < a \leq 3$ សមីការមានរឹស $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ រឺ $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

បើ $a > 3$ សមីការមានរឹស $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

90. ▲ តាង $u = a - x; v = x - b$ ។ ដូច្នេះ $u^5 + v^5 = (a-b)^5; u + v = a - b$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} & u^5 + v^5 = (u+v)\{[(u+v)^2 - 2uv]^2 - uv(u+v)^2 + u^2v^2\} \\ & \Leftrightarrow (a-b)^5 = (a-b)\{[(a-b)^2 - 2uv]^2 - uv(a-b)^2 + u^2v^2\} \\ & \Leftrightarrow (a-b)^4 = (a-b)^4 + 5u^2v^2 - 5uv(a-b)^2 \\ & \Leftrightarrow 5(uv)^2 - 5uv(a-b)^2 = 0 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $uv = 0$ រឺ $uv = a - b$ ។

ករណី $uv = 0$ នោះ $u = 0$ រឺ $v = 0$ ។ បើ $u = 0$ នោះ $x = a$ ។បើ $v = 0$ នោះ $x = b$ ។

ករណី $uv = a - b$ នោះ យើងមាន

$$\begin{cases} u+v=a-b \\ uv=a-b \end{cases}$$

(u,v) ជាឫសនៃសមីការ $t^2-(a-b)t+(a-b)=0$ គ្មានឫស។

ដូច្នេះសមីការមានឫសពីរ គឺ $x_1=a; x_2=b$ ។

91. ▲ តាង

$$y=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1 \Rightarrow y\geq 0; y+1=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$
$$\Rightarrow 2y^2+4y+2=x+3$$
$$\Rightarrow x=2y^2+4y-1$$

ដូច្នេះ ចំពោះ $x\geq -1$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍ $y=2x^2+4x-1$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1$ ម្យ៉ាងវិញទៀត អនុគមន៍ $y=2x^2+4x-1$ កើនលើ $(-1;\infty)$ (អនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$) ដូច្នេះ

$$2x^2+4x-1=\sqrt{\frac{x+3}{2}}-1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+4x-1=x$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

92. ▲ យើងមាន

$$x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)>0$$
$$x^2-3x+1=2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)$$

តាង $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ ។ សមីការទៅជា

$$2t^2-mt-1=0 \quad (1)$$

ពី $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ យើងទាញបាន

$$t^2(x^2+x+1)=x^2-x+1$$
$$(t^2-1)x^2+(t^2+1)x+t^2-1=0 \quad (2)$$
$$\Delta=(t^2+1)^2-4(t^2-1)^2$$
$$=(3-t^2)(3t^2-1)\geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\leq t\leq \sqrt{3}$$

ក) ករណី $m=-\sqrt{3}/3$

ពី(១) យើងទាញបាន

$$t_1=-\frac{3}{2\sqrt{3}}; t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

យើងយក $t=1/\sqrt{3}$ ។ ពី(២) យើងទាញបាន $x=1$ ។

ខ) ក្នុងសមីការ(១) យើងមាន $\Delta = m^2 + 8 > 0$ ដូច្នេះ(១)មានរឹសពីរ $t_1; t_2$ ។ ដោយ $t_1 t_2 = -\frac{1}{2} < 0$ នោះ $t_1 < 0 < t_2$ ។ មានតែរឹស t_2 មួយគត់ ដែលអាចអោយសមីការ(២) មានរឹស ព្រោះ $\frac{\sqrt{3}}{3} \le t \le \sqrt{3}$។ សមីការ(*) មានរឹសតែមួយគត់ បើ សមីការ(២)មានរឹសតែមួយគត់ដែរ។

បើ $t = 1$ នោះ (១)នាំអោយ $m = 1$ ហើយ (២) នាំអោយ $x = 0$ ។

បើ $t^2 - 1 \ne 0$ នោះ $\Delta = (3 - t^2)(3t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; t_2 = \sqrt{3}$ ។

បើ $t = \frac{\sqrt{3}}{3}; (1) \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 1$

បើ $t = \sqrt{3}; (1) \Rightarrow m = \frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 1$

ដូច្នេះ $m = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$ ។

93. ▲ តាង $y = \sqrt[3]{7x+1}; z = -\sqrt[3]{x^2 - x - 8}; t = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1}$ ។ ដូច្នេះ

$$y + z + t = 2$$
$$\Rightarrow \quad (y + z + t)^3 = 8 \quad (1)$$

យើងមាន

$$y^3 + z^3 + t^3 = (7x + 1) - (x^2 - x - 8) + (x^2 - 8x - 1) = 8 \quad (2)$$

ពី(១)និង(២) យើងទាញបាន

$$(y + z + t)^3 - (y^3 + z^3 + t^3) = 3(y + z)(z + t)(t + y) = 0$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -z \\ z = -t \\ t = -y \end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{7x + 1} = \sqrt[3]{x^2 - x - 8} \Leftrightarrow 7x + 1 = x^2 - x - 8$$
$$\Leftrightarrow x = -1\ ; x = 9$$
$$\sqrt[3]{x^2 - x - 8} = \sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = x^2 - 8x - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$
$$\sqrt[3]{7x + 1} = -\sqrt[3]{x^2 - 8x - 1} \Leftrightarrow 7x + 1 = -(x^2 - 8x - 1)$$
$$\Leftrightarrow x = 0; x = 1$$

94. ▲ តាង $u = \sqrt{x+1} \ge 0; v = \sqrt{x^2 - x + 1} > 0$ ។ សមីការសមមូលនឹង

$$5uv = 2(v^2 + v^2) \Leftrightarrow 5\frac{u}{v} = 2\left(\frac{u}{v}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v} = 2 \\ \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\frac{u}{v} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} :\ \text{គ្មានរឹស}$$
$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

សមីការមានរឹសពីរ $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

95. $\left\{\left(-\frac{4}{9};20/9\right);(2;1)\right\}$. **96.** $\left\{(-1;3);\left(\frac{71}{21};-25/7\right)\right\}$.**97.** $\{(51;24{,}5)\}$. **98.** $\{(-19{,}6\,;5{,}2);\ (-14;8)\}$.● ដាក់អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការទីមួយជារាង $(x+3y)^2-6(x+3y)-40$ ហើយតាង $x+3y=t$ ។ **99.** $\{(2;3);(3;2)\}$. **100.** $\{(4;-1);(1;-4)\}$. **101.** $\{(1;3);(3;1)\}$. **102.**$\{(1;2);(2;1)\}$ **103.**$\left\{\left(-\frac{1}{2};-1/3\right);(1/3;1/2)\right\}$.**104.**$\{(-1;2);(2;-1)\}$ **105.**$\{(3;2);(2;3)\}$ **106.**$\{(-1;-4);(4;1)\}$. **107.** $\{(-3;4);(4;-3)\}$. **108.** $\{(5+\sqrt{28};-5+\sqrt{28});(5-\sqrt{28};-5-\sqrt{28});(5;2);(-2;-5)\}$. **109.**$\{(0{,}6;0{,}3);(0{,}4;0{,}5)\}$.

110.$\left\{(-1;2);\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)\right\}$ **111.**$\left\{(2;1);(1;2);\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.● តាង $x+y=u,xy=v$ បន្ទាប់មក $-u+v=z$ និង $uv=t$ ។

112. $\left\{\left(-\frac{25+5\sqrt{61}}{9};\frac{5+\sqrt{61}}{9}\right);\left(\frac{-25+5\sqrt{61}}{9};\frac{5-\sqrt{61}}{9}\right);(-6;-4/3);(3/2;1/3)\right\}$. ● តាង $x=yt$.

113. $\{(-1;3);(1;-3);(16/\sqrt{11};1/\sqrt{11});(-16/\sqrt{11};-1/\sqrt{11})\}$.

114. $\{(1;2);(-1;-2);(\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$.

115. $\left\{\left(\frac{2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}};-\frac{3}{\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}}\right);\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}};\frac{3}{\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}}\right);(2;-1)\right\}$.

116. $\{(2;1)\}$. ▲ គុណសមីការទីពីរនឹង 2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយ បន្ទាប់មកគុណសមីការទីពីរដដែលនឹង -2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយចាស់ យើងទាញបានប្រព័ន្ធថ្មី

$$\begin{cases}16x^2+8xy+y^2-72x-18y+81=0\\4x^2-12xy+9y^2-4x+6y+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4x+y)^2-18(4x+y)+81=0\\(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y=9\\2x-3y=1\end{cases}$$

117. $\{(0;1/\sqrt{3});(0;-1/\sqrt{3});(1;1);(-1;-1)\}$. **118.** $\left\{\left(\frac{2}{7};-9/7\right);(1;3)\right\}$.

119. $\{(2;6);(1;3)\}$.**120.** $\{(2\sqrt{2};-\sqrt{2});(-2\sqrt{2};\sqrt{2})\}$.

121. $\{(\sqrt{6};\sqrt{6}/3);(-\sqrt{6};-\sqrt{6}/3)\}$

122. $\{(2;1;-1);(31/15\,;17/15\,;-2/3)\}$. **123.** $\{(1;2;2);(2;1;1)\}$

124. $\left\{(3;-2;1);(-2;3;1);\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2};-1\right);\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2};-1\right)\right\}$.

125. $\{(3;1;-2);(-5;-3;0)\}$. **126.** $\{(3;5;-1);(-3;-5;1)\}$

127. $\left\{(2;-1;3);(-2;1;-3);\left(-\frac{7}{\sqrt{13}};\frac{5}{\sqrt{13}};-\frac{11}{\sqrt{13}}\right);\left(\frac{7}{\sqrt{13}};-\frac{5}{\sqrt{13}};\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\right\}$.

128. $\{(-4;-3;1);(4;3;-1)\}$. **129.** $\{(1/2;1/3;1/4)\}$.

130. $\{(-1;1;0);(1;-1;0)\}$. **131.** $\{(3;3;3)\}$.

132. $\{(16;30)\}$. **133.** $\{(41;40)\}$. **134.** $\left\{(c;c-1)|c\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$. **135.** $\left\{\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{5}\right);(5;4)\right\}$.

136. $\left\{\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{109}+9}{2}};\sqrt{\frac{3\sqrt{109}-9}{2}}\right);(-5;-3)\right\}$. **137.** $\{(0;a+\sqrt{a^2+3})\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;\sqrt{3})$;
$\{(0;a+\sqrt{a^2+3});(0;-a-\sqrt{a^2-3});\ (0;-a+\sqrt{a^2-3})\}$ ចំពោះ $a\in[\sqrt{3};\infty)$។

138. $\{(1;1;0)\}$. ▲ សមីការទីមួយ យើងទាញបាន $x=2-y$ ។ ជំនួសចូលសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$2y-y^2-z^2=1$$
$$\Longrightarrow\ z^2+(y-1)^2=0$$
$$\Longrightarrow z=0;y=1$$

139. $\left\{-\frac{1}{4}\right\}\cup[0;\infty)$.

140. ក) 25. ▲ គុណសមីការទីមួយនឹង α និងសមីការទីពីរនឹង β ដែល $\alpha\beta\neq 0$ បន្ទាប់មកបូកចូលគ្នា យើងទាញបាន៖

$$\left(\frac{2\alpha}{3}+\beta\right)x+\left(\frac{4\alpha}{5}+\beta\right)y+\left(\frac{5\alpha}{6}+\beta\right)z=61\alpha+79\beta$$

យើងយក $\frac{2\alpha}{3}+\beta=0;\frac{4\alpha}{5}+\beta=\frac{2}{5};\ \frac{5\alpha}{6}+\beta=\frac{1}{2}$។ យើងទាញបាន $\alpha=3,\beta=-2$ ។ ដូច្នេះ $\frac{2}{5}y+\frac{z}{2}=61\alpha+79\beta=15$ ។

ខ) $\{(27;10;42)\}$. ▲ ដោយសារ x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ $x=3k;y=5l;z=6m$ ដែល $k;l;m\in\mathbb{N}$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases}4l+5m=61-2k\\5l+6m=79-3k\end{cases}$$

យើងទាញបាន $l=29-3k$ និង $m=2k-11$ ។ ដោយ $k;l;m\in\mathbb{N}$នោះ

$$\begin{cases}k>0\\29-3k>0\\2k-11>0\end{cases}$$

យើងទាញបាន $k=9$ ។

141.▲ចំពោះ $a=0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)=(0,0,0)$។ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)\in\{(t_1,t_2,z_0);(t_2,t_1,z_0)\}$ ដែល

$$z_0=\frac{a^2-b^2}{2a};\ t_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}$$

ដើម្បីអោយចំលើយវិជ្ជមាននិងខុសគ្នា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់គ្រាន់គឺ $3b^2>a^2>b^2$ និង $a>0$ ។

142.▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=y(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ ។ បើ $y=2$ នោះយើងទាញបាន $x_1-x_2=x_2-x_3=\cdots=x_5-x_1$ ដូច្នេះ $x_1=x_2=\cdots=x_5$ ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធ។ បើ $y\neq 2$ នោះ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$។ បូកសមីការទីបីខាងដើមចូលគ្នា យើងទាញបាន $x_2=y(x_1+x_2+x_3)$ ។ដោយ $x_1+x_3=yx_2$ នោះ $x_2=(y^2+y)x_2,\Longrightarrow(y^2+y-1)x_2=0$ ។ បើ $y^2+y-1\neq 0$ នោះ $x_2=0$ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $x_1=x_2=\cdots=x_5=0$ ។ បើ $y^2+y-1=0$ នោះ បូកសមីការទីមួយនិងទីពីរ យើងទាញបាន $x_5+x_2+x_1+x_3=yx_1+yx_2\ \Longrightarrow x_3+x_5=yx_1+yx_2-x_2-x_1\ \Longrightarrow$ $x_3+x_5=-y^2x_2-y^2x_1\ \Longrightarrow x_3+x_5=-y(x_1+x_3)-y(x_5+x_2)\ \Longrightarrow x_3+x_5=yx_4$ ។

ដូចគ្នា យើងទាញបានសមីការទី៥។ មានន័យថា សមីការទី៤និងទី៥ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងសមីការបីខាងលើ។ យក $x_1 = u; x_5 = v$ ។ យើងទាញបាន $x_2 = yu - v; x_3 = y^2u - yv - u; x_4 = y^3u - y^2v - 2yu + v$ ។

143.▲ សន្មតថា (x_1, x_2, x_3) ជាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធ។ យើងអាចសន្មតថា $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|$ ។ សន្មតថា $|x_1| > 0$ ។ ពីសមីការទីមួយ យើងទាញបាន

$$0 = |x_1|.\left|a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1}\right| \geq |x_1|.(a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|) > 0$$

មិនអាច។ ដូច្នេះ $|x_1| = 0$ នាំអោយ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ។

144.▲បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧបមាថា $x_1 = 0$ នោះ $x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \Rightarrow x_2x_3x_4 = 2; x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \Rightarrow x_2 = 2; \dots; x_3 = x_4 = 2$ មិនអាច។ ដូច្នេះគ្មានចំនួនណាមួយអាចស្មើសូន្យបានទេ។ តាង $x_1x_2x_3x_4 = p$ ។ សម្មតិកម្មសមមូលនឹង $x_i + \frac{p}{x_i} = 2, i = 1,2,3,4$ ។ សមីការ $x + \frac{p}{x} = 2$ មានរឹសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរតាងដោយ y និង z ។ ដូច្នេះ x_i និមួយៗអាចស្មើ y រឺស្មើz ។ យើងមានបីករណីៈ

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y$ ។ ដូច្នេះ $y + y^3 = 2$ នាំអោយ $y = 1$ ។

$x_1 = x_2 = x_3 = y, x_4 = z$ ។ ដូច្នេះ $z + y^3 = y + y^2z = 2$ ។ យើងទាញបាន $(y; z) = \{(-1; 3); (1; 2)\}$

$x_1 = x_2 = y, x_3 = x_4 = z$ ។ ករណីនេះយើងទាញបាន $y = z = 1$ ។

ដូច្នេះរឹស $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ គឺ $\{(1;1;1;1); (-1;-1;-1;3)\}$ និងចំលាស់របស់វា។

145.▲ តាង $L_1 = |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4$ និងដូចគ្នាចំពោះ L_2, L_3 និង L_4 ។ សន្មតថា $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ។ នៅក្នុងករណីនេះ

$$\begin{aligned}2|a_1 - a_2||a_2 - a_3|x_2 &= |a_3 - a_2|L_1 - |a_1 - a_3|L_2 + |a_1 - a_2|L_3\\ &= |a_3 - a_2| - |a_1 - a_3| + |a_1 - a_2| = 0\\ 2|a_2 - a_3||a_3 - a_4|x_3 &= |a_4 - a_3|L_2 - |a_2 - a_4|L_3 + |a_2 - a_3|L_4\\ &= |a_4 - a_3| - |a_2 - a_4| + |a_2 - a_3| = 0\end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $x_2 = x_3 = 0$ ហើយនាំអោយ $x_1 = x_4 = 1/|a_1 - a_4|$ ។ រឹសនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការដែលអោយ។ ចំលើយផ្សេងទៀតជាចំលាស់នៃចំលើយមួយនេះ។

146.▲ បើមួយក្នុងចំនោម x, y, z ស្មើ 1 រឺ -1 នោះ $(-1,-1,-1)$ និង $(1,1,1)$ ។ ប្រព័ន្ធគ្មានចំលើយផ្សេងពីនេះទេ។ តាង $f(t) = t^2 + t - 1$ ។ បើក្នុងចំនោម x, y, z មានមួយធំជាង 1 សន្មតថា $x > 1$ យើងមាន $x < f(x) = y < f(y) = y < f(y) = z < f(z) = x$ មិនអាច។ ដូច្នេះ $x, y, z \leq 1$ ។

ឥលូវសន្មតថា មានមួយក្នុងចំនោម x, y, z សន្មតថា x មានតំលៃតូចជាង -1 ។ ដោយ $\min f = -\frac{5}{4}$ នោះ យើងមាន $x = f(z) \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$។ ដោយ $f\left(\left[-\frac{5}{4}; -1\right)\right) = (-1; -11/16) \subseteq (-1; 0)$ និង $f\big((-1; 0)\big) = \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$ ដូច្នេះ $y = f(x) \in (-1; 0), z = f(y) \in \left[-\frac{5}{4}; -1\right)$ និង $x = f(z) \in (-1,0)$ ផ្ទុយពីការសន្មត។ ដូច្នេះ $-1 \leq x, y, z \leq 1$ ។

បើ $-1 < x,y,z < 1$ នោះ $x > f(x) = y > f(y) = z > f(z) = x$ មិនអាច។

147.$(-2;-1);\left(-\frac{14}{3};\frac{13}{3}\right)$. 148.▲ តាង $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ និង តាង $\sigma_k, k = 1,2,\ldots,n$ ជាពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទីk នៃ $x_1,x_2,\ldots,x_n$។ ពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទីk ជា $\sigma_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ ដែល $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\} \in \{1,2,\ldots,n\}$។ ឧទាហរណ៍ $\sigma_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$; $\sigma_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$; $\sigma_3(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ ។

ប្រព័ន្ធសមីការដែលអោយ $S_k = a^k, k = 1,2,\ldots,n$ ។ តាមរូបមន្តញូវតុន យើងទាញបាន

$$k\sigma_k = S_1\sigma_{k-1} - S_2\sigma_{k-2} + \cdots + (-1)^k S_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1}S_k, k = 1,2,\ldots,n$$

ប្រព័ន្ធសមីការដែលអោយសមមូលនឹង $\sigma_1 = a$ និង $\sigma_k = 0$ ចំពោះ $k = 2,\ldots,n$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទវៀត $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ជាឬសនៃពហុធា $x^n - ax^{n-1}$ មានន័យថា ឬសទាំងនោះស្មើនឹង $a,0,\ldots,0$ និងចំលាស់ទាំងអស់។

149. បើ $m \notin \{-2;1\}$ នោះប្រព័ន្ធមានឬសតែមួយគត់

$$x = \frac{b + a - (1+m)c}{(2+m)(1-m)}; y = \frac{a + c - (1+m)b}{(2+m)(1-m)}; z = \frac{b + c - (1+m)a}{(2+m)(1-m)}$$

ចំនួន x,y,z ជាស៊ីតនព្វន្ត បើនិងមានតែបើ a,b,c ជាស៊ីតនព្វន្តដែរ។

បើ $m = 1$ នោះប្រព័ន្ធមានចំលើយ បើនិងមានតែបើ $a = b = c$។ ករណី $m = -2$ ប្រព័ន្ធមានចំលើយ បើនិងមានតែបើ $a + b + c = 0$ ។ នៅក្នុងករណីទាំងពីរនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយច្រើនរាប់មិនអស់។.

150.▲ យើងមាន $c_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n គូ។ ដូច្នេះ $c_n = 0$ អាចបានតែចំពោះ n សេសតែប៉ុណ្ណោះ។ សន្មតថា $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_8$ ហើយថា $a_1 \le 0 \le a_8$។

បើ $|a_1| < |a_8|$ នោះមាន n_0 ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស $n > n_0$ យើងមាន $7|a_1|^n < a_8^n$ ។ ដូច្នេះ $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n > 7a_1^n + a_8^n > 0$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែលថា $c_n = 0$ ចំពោះតំលៃ n ច្រើនរាប់មិនអស់។ ដូចគ្នាករណី $|a_1| > |a_8|$ ក៏មិនអាចដែរ។ យើងទាញបាន $a_1 = -a_8$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $a_2 = -a_7; a_3 = -a_6$ និង $a_4 = -a_5$ ។ ហើយ $c_n = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស n ។

151.▲ តាង $X = 1 - x; Y = 1 - y; Z = 1 - z; T = 1 - t$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} X^2 = Y \\ Y^2 = Z \\ Z^2 = T \\ T^2 = X \end{cases}$$

យើងទាញបាន $X^4 = Y^2 = Z \Rightarrow X^8 = Z^2 = T \Rightarrow X^{16} = T^2 = X \Rightarrow X(X^{15} - 1) = 0$ ។

យើងទាញបាន

- $X = 0; \Rightarrow Y = Z = T = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 1$

- $X = 1; \Rightarrow Y = Z = T = 1 \Rightarrow x = y = z = t = 0$

152.▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$0=\sum_{i=1}^{1000}\left(x_i^2+2\left(\frac{a-1}{2}\right)x_i+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{1000}\left(x_i+\frac{a-1}{2}\right)^2$$

យើងទាញបាន $x_1=x_2=\cdots=x_{1000}=\frac{a-1}{2}$ ។

153.▲ តាង $t_1=x_1-x_2; t_2=x_2-x_3; \dots; t_n=x_n-x_1$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases}2t_1=3t_2\\2t_2=3t_3\\ \quad\dots\dots\\2t_n=3t_1\end{cases}$$

គុណអង្គនឹងអង្គនៃសមីការ យើងទាញបាន $2^n t_1t_2\dots t_n=3^n t_1t_2\dots t_n \implies t_1t_2\dots t_n=0$។ ដូច្នេះត្រូវមាន t_i មួយដែលស្មើសូន្យ ។ ហើយដោយ $2t_i=3t_{i+1}$ នោះ យើងទាញបាន $t_1=t_2=\cdots=t_n=0$ ហើយ $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ។

154.▲ យើងមាន $3S=x^2+y^2+z^2\ge 0 \implies S=x+y+z\ge 0$ ។ ដូច្នេះក្នុងចំនោម x,y,z ត្រូវតែមានមួយជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន។ សន្មតថា $x\ge 0$ ។ យើងទាញបាន

$$y(4-y)=x\ge 0 \implies 0\le y\le 4$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $0\le x,y,z\le 4$ ។ តាង $x=4\sin^2\alpha$ ដែល $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ ។ យើងទាញបាន $z=4\sin^2 2\alpha; y=4\sin^2 4\alpha$ ។ ហើយ $x=4\sin^2 8\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$4\sin^2 8\alpha=4\sin^2\alpha \implies \cos 16\alpha=\cos 2\alpha$$

នាំអោយ

1) $16\alpha=2\alpha+2k\pi \implies \alpha=\frac{k\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z})$;

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\implies k=\{0;1;2;3\}$$

- $k=0$

$$x=y=0; \implies S=0$$

-$k=1;2;3$

$$\implies S=4\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)=7$$

2) $16\alpha=-2\alpha+2k\pi \implies \alpha=\frac{k\pi}{9}\ (k\in\mathbb{Z})$;

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\implies k=\{0;1;2;3;4\}$$

- $k=0$

$$x=y=0; \implies S=0$$

- $k=1;2;4$

$$\implies S=4\left(\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)=6$$

- $k=3$

$$\implies S=4\left(\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{3\pi}{3}\right)=9$$

155. $\{(1;1;1);(-2;-2;-2)\}$▲យកសមីការទីមួយដកសមីការទីពីរ សមីការទីពីរដកសមីការទីបី យើងទាញបាន

$$(x-y)(1-z)=0;\quad (1)$$

$$(y-z)(1-x)=0 \quad (2)$$

$(1) \Longrightarrow \ x=y$ រឺ $z=1$

$(2) \Longrightarrow \ y=z$ រឺ $x=1$

យើងទាញបានបួនករណី

$$(x=y=z);(x=y;x=1);(z=1;y=z);(z=1;x=1)$$

ករណីទាំងបួននេះ ត្រូវនឹង $x=y=z=1$ រឺ $x=y=z=-2$ ។

156. ▲ យើងសិក្សាករណី $a>0$ ព្រោះ $a\neq 0$ ។ ករណី $a<0$ គុណអង្គសមីការនឹងសញ្ញាដក។ បូកសមីការទាំងបីនៃប្រព័ន្ធបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$[ax^2+(b-1)x+c]+[ay^2+(b-1)y+c]+[az^2+(b-1)z+c]=0$$

តាង $f(t)=at^2+(b-1)t+c$ ។ យើងមាន

$$f(x)+f(y)+f(z)=0 \qquad (*)$$

បើ $\Delta=(b-1)^2-4ac<0$ នោះ $f(t)>0$ ចំពោះគ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ ព្រោះ $a>0$។ ដូច្នេះ

$$f(x)+f(y)+f(z)>0$$

ផ្ទុយពីសមីការ(*)។

157. ▲ ជំនួស $y=-x$ ចូលក្នុងប្រព័ន្ធ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3+ax^3=\frac{1}{2}(a+1)^2 & (1)\\ 2x^3-ax^3=1 & (2)\end{cases}$$

សមីការទី២ យើងទាញបាន $x\neq 0$ ។ បូកសមីការទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$3x^3=\frac{1}{2}(a+1)^2+1>0; \Longrightarrow x>0$$

យកសមីការទី១ចែកនឹងសមីការទី២ យើងទាញបាន

$$\frac{a+1}{2-a}=\frac{1}{2}(a+1)^2 \quad \Longrightarrow a=0;\ -1;1$$

ចំពោះ $a=0$ យើងមាន

$$\begin{cases} x^3=\frac{1}{2}\\ x^3+xy^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ y=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}$$

រឹសដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}};y=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ។

ចំពោះ $a=-1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3+y^3=0\\ x^3-x^2y+xy^2=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\\ y=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{cases}$$

ចំពោះ $a=1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3-y^3=2\\ x^3+x^2y+xy^2=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=2\\ 2x^3+2x^2y+2xy^2=2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)=0$$
$$\Rightarrow (x+y)(x^2+xy+y^2)=0$$
$$\Rightarrow x+y=0$$
$$\Rightarrow x=1; y=-1$$

ដូច្នេះ $a=\{-1;0;1\}$ ប្រព័ន្ធមានរឹសផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខណ្ឌ។

158. ▲ប្រព័ន្ធសមមូលនឹង

$$\begin{cases} 3x^2-2(3+z)x+3z+3=0 & (1) \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2 & (2) \\ y^2=-z^2+6z & (3) \\ z\le 3 & (4) \end{cases}$$

សមីការ(១) មានរឹស បើ $\Delta'=(3+z)^2-3(3z+3)\ge 0 \quad \Rightarrow z\le 0\,; z\ge 3$ (៥)។ សមីការទី៣ មានរឹសបើ $-z^2+6z\ge 0 \quad \Rightarrow 0\le z\le 6$ (៦)។ ពី(៤) (៥)(៦)យើងទាញបាន $z=0; z=3$ ។ បើ $z=0$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y=0;$ និងពី(២) យើងទាញបាន $x=1; x=2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(១) យើងទាញបាន $x=1$ ។

បើ $z=3$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y=\pm 3$ ។ ពី(១) យើងទាញបាន $x=2$ ។ ចំពោះ $x=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(២) យើងទាញបាន $y=-3$ ។ ដូច្នេះ

$$(x;y;z)=\{(1;0;0);(2;-3;3)\}$$

159. ▲គុណសមីការទីមួយទីពីរនិងទីបី នឹង c,a,b រៀងគ្នា យើងទាញបាន

$$\begin{cases} \dfrac{ac}{x}-\dfrac{bc}{z}=c^2-czx \\ \dfrac{ab}{y}-\dfrac{ac}{x}=a^2-axy \\ \dfrac{bc}{z}-\dfrac{ab}{y}=b^2-byz \end{cases}$$

បូកសមីការទាំងបីបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a^2+b^2+c^2=axy+bzy+cxz \qquad (1)$$

បំបាត់ភាគបែងនៃប្រព័ន្ធដើម

$$\begin{cases} az-bx=cxz-z^2x^2 \\ bx-cy=axy-x^2y^2 \\ cy-az=bzy-y^2z^2 \end{cases}$$

បូកបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=axy+bzy+cxz \qquad (2)$$

បូក(១)នឹង(២) យើងទាញបាន

$$a^2+b^2+c^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2(axy+bzy+cxz)$$
$$\Rightarrow \quad (xy-a)^2+(zy-b)^2+(xz-c)^2=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xy=a \\ zy=b \\ xz=c \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad (x;y;z)=\left\{\left(\sqrt{\frac{ac}{b}};\sqrt{\frac{ab}{c}};\sqrt{\frac{bc}{a}}\right);\left(-\sqrt{\frac{ac}{b}};-\sqrt{\frac{ab}{c}};-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\right\}$$

160. ▲ប្រព័ន្ធមានរឹសងាយ $(0;0;0)$ ។ បើ $x=\pm1$ នោះ $\pm2+y=y$ មិនអាច។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $x\neq\pm1; y\neq\pm1; z\neq\pm1$ ។ យើងមាន

$$\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2}\quad(4)\\z=\dfrac{2y}{1-y^2}\quad(5)\\x=\dfrac{2z}{1-z^2}\quad(6)\end{cases}$$

តាង $x=\tan\alpha\neq\pm1 \;\Rightarrow \alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ ។ ពី(៤) យើងទាញបាន $y=\tan2\alpha$ និងពី(៥) យើងទាញបាន $z=\tan4\alpha$ ហើយជាចុងក្រោយ $x=\tan8\alpha=\tan\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$8\alpha=\alpha+n\pi \;\Rightarrow\; \alpha=n\frac{\pi}{7}\;;(n\in\mathbb{Z})$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានរឹស $(x;y;z)=\left\{\left(\tan n\frac{\pi}{7};\tan n\frac{2\pi}{7};\tan n\frac{4\pi}{7}\right)|n\in\mathbb{Z}\right\}$

V. វិសមភាព

161. ▲ តាង $A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}; B=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}$ ។ ដោយ

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2},\frac{4}{5}>\frac{3}{4},\frac{6}{7}>\frac{5}{6},\cdots,\frac{98}{99}>\frac{97}{98},1>\frac{99}{100}$$

នោះ $B>A$ ។ យើងមាន

$$A.B=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\right).\left(\frac{5}{6}.\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right)=\frac{1}{100}$$

ដូច្នេះ $A^2<AB=\frac{1}{100}\Rightarrow A<\frac{1}{10}$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$B<2A=\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100}$$

ព្រោះ $\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\frac{4}{5}<\frac{5}{6},\frac{6}{7}<\frac{7}{8},\cdots,\frac{98}{99}<\frac{99}{100}$ ។ ដូច្នេះ

$$A.2A>AB=\frac{1}{100}\Rightarrow A>\frac{1}{10\sqrt{2}}$$ ។

162. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}=\frac{1.2.3\cdots100}{2^{50}\left(1.2.3\cdots50\right).2^{50}\left(1.2.3\cdots50\right)}$$

$$=\frac{1.2.3\cdots100}{\left(2.4.6\cdots100\right).\left(2.4.6\cdots100\right)}=\frac{1.3.5\cdots99}{2.4.6\cdots100}$$

ហើយតាមសំនួរ**161.** យើងទាញបានវិសមភាពពិត។

163. ▲ ដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ យើងមាន

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

ចំពោះ $n=1$ យើងមាន $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$។ បន្ទាប់មកទៀតសន្មតថាពិតដល់ n មានន័យថា

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

យើងគុណអង្គសង្ខាងនៃវិសមភាពនេះនឹង $\frac{2n+1}{2n+2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{2n+1}{\left(2n+2\right)\sqrt{3n+1}}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\left[\frac{2n+1}{\left(2n+2\right)\sqrt{3n+1}}\right]^2 &= \frac{\left(2n+1\right)^2}{12n^3+28n^2+20n+4}\\ &= \frac{\left(2n+1\right)^2}{\left(12n^3+28n^2+19n+4\right)+n}\\ &= \frac{\left(2n+1\right)^2}{\left(2n+1\right)^2\left(3n+4\right)+n}\\ &< \frac{1}{3n+4}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n+1}{\left(2n+2\right)\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

164. ▲ អនុវត្តន៍វិសមភាពក្នុងសំនួរទី**163.** ចំពោះ $n=50$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} \leq \frac{1}{\sqrt{3.50+1}} = \frac{1}{\sqrt{151}} = \frac{1}{12,288\cdots} < \frac{1}{12}$$

ពិត។

165. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។

166. ▲ជាដំបូង យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \leq n$ យើងមាន

$$1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

ចំពោះ $k=1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាវិសមភាពពិតចំពោះតំលៃ k ណាមួយ។ យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)\geq\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}>1+\frac{k+1}{n}$$ ពិត (មិនចាំបាច់តែ $k\leq n$ ទេ)

យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$

$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{\left(k+1\right)^2}{n^2}-\frac{n\left(k+1\right)-k^2}{n^3}$$

$$<1+\frac{k+1}{n}+\frac{\left(k+1\right)^2}{n^2}$$

ព្រោះ $n\left(k+1\right)>k^2$ បើ $n\geq k$។ ដូច្នេះដោយយក $k=n$ យើងទាញបាន

$$2=1+\frac{n}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3$$

167. ▲ តាមសំនួរ 166. យើងទាញបាន

$$\left(1,000.001\right)^{1.000.000}=\left(1+\frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000}>2$$

168. ▲យើងមាន

$$\frac{\left(1.001\right)^{999}}{\left(1000\right)^{1000}}=\left(\frac{1.001}{1000}\right)^{1000}.\frac{1}{1001}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}.\frac{1}{1001}$$

$$<3.\frac{1}{1001}<1$$ (តាមសំនួរ 166.)

ដូច្នេះ $1.000^{1.000}>1.001^{999}$។

169. ▲យើងមាន

$$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}<2\sqrt{c}$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}\right)^2<4c$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{c^2-1}<c$$

ពិត។

170. ▲តាងចំនួនពិតទាំងនោះដោយ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ដែល $x_1x_2 \dots x_n = 1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ ។ ចំពោះ $n = 1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n = k$ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_k$ ដែល $x_1x_2 \dots x_k = 1$ យើងមាន $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$ ។ ចំពោះ $n = k + 1$ បើ $x_1 = x_2 = \dots = x_{k+1} = 1$ នោះ$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1$ វិសមភាពពិត។ ករណីផ្សេងពីនេះ ដោយសារ ផលគុណនៃចំនួនទាំងនេះមានតំលៃស្មើមួយ ហើយចំនួនទាំងនេះមិនមានតំលៃស្មើមួយដូចគ្នាទាំងអស់ ដូច្នេះមានចំនួនខ្លះតូចជាងមួយចំនួនខ្លះធំជាងមួយ។ សន្មត $x_1 < 1, x_{k+1} > 1$។ តាង $y_1 = x_1x_{k+1}$។ យើងមាន $y_1x_2 \dots x_k = 1$ ដូច្នេះ $y_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + \dots + x_k) - y_1 + x_1 + x_{k+1} \\ &\geq k - y_1 + x_1 + x_{k+1} = (k+1) - 1 - x_1x_{k+1} + x_1 + x_{k+1} \\ &= k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1 \end{aligned}$$

វិសមភាពពិតដល់ $k + 1$ ។

171. ▲ ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំនើន។ ចំពោះ $n = 1$ វិសមភាពពិត។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n = k$ មានន័យថា $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភពនឹង $(1 + x_{k+1})$ យើងទាញបាន $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1})$។ យើងមាន $(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq 0$ ពិតព្រោះ $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។ ដូច្នេះ $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1}$ ។

172. ▲ ចំពោះ $n = 6$ យើងមាន $2^6 = 64 < 6! = 720 < 3^6 = 729$

សន្មតថាវិសមភាពខាងលើពិតចំពោះ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ។ យើងនឹងបង្ហាញថា ពិតចំពោះ $n + 1$ ដែរ។ យើងមាន

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n > (n+1)! > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1)$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

និង $$\left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$ ។

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n}} > n+1 > \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{3}\right)^{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n}} > 1 > \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n}}{\left(\frac{n}{3}\right)^{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > 1 > \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3 \qquad \text{ពិត។}$$

173. ▲យើងមាន $\Delta' = 999^2 - ac > 0$; $\Delta' \in \mathbb{Z}$ និង $|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$ ។

បើ $\Delta' \geq 2$ នោះ

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} > \frac{2\sqrt{\Delta'}}{2000} \geq \frac{2\sqrt{2}}{2000} > \frac{1}{998}$$

បើ $\Delta' = 1$ នោះ $ac = 999^2 - 1 = 998.1000 = 2^4.5^3.449$ ។ យើងមាន $2^2.5^3.449 = 1996 < 2000$ ជាតួចែកមួយនៃ $2^4.5^3.449$ នោះ $a \leq 1996$ ។ យើងទាញបាន

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = \frac{2}{|a|} \geq \frac{1}{998}$$

174. ▲លក្ខខណ្ឌដែលអោយ នាំអោយ $x \neq y$ និង

$$a = \frac{y-2}{y-x}; b = \frac{2-x}{y-x}$$

ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌទីបី យើងទាញបាន

$$3 = ax^2 + by^2 = \frac{(y-2)x^2}{y-x} + \frac{(2-x)y^2}{y-x} = 2(x+y) - xy \quad (1)$$

តាង $C = ax^3 + by^3 > 0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} C &= \frac{y-2}{y-x}x^3 + \frac{2-x}{y-x}y^3 \\ &= -xy(x+y) + 2(x^2+xy+y^2) \\ &= -xy\,(x+y) + 2(x+y)^2 - 2xy \\ &= (x+y)[-xy + 2(x+y)] - 2xy \\ &= 3(x+y) - 2xy; \qquad \text{តាម } (1) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{cases} 2(x+y) - xy = 3 \\ 3(x+y) - 2xy = C \end{cases}$$

យើងទាញបាន $x + y = 6 - C; xy = 9 - 2C$ ។

យើងមាន $(x+y)^2 > 4xy \quad \Rightarrow \quad (6-C)^2 > 4(9-2C) \quad \Rightarrow C > 4$ ។

យើងមាន $xy > 0 \quad \Rightarrow 9-2C > 0; \Rightarrow C < 4{,}5$ ។

175. ▲

ករណី $x < -3$ នោះ

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| > |x| > 3$$

ករណី $-3 < x < 0$

ករណីនេះ $\frac{2x-1}{x+3} < 0$ ដូច្នេះ

$$S \geq \frac{2x-1}{x+3} = -2 + \frac{7}{x+3} > -2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$$

ករណី $x > 1/2$

យើងមាន

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq |x| > \frac{1}{2}$$

ករណី $0 \leq x \leq 1/2$

ករណីនេះយើងមាន $S \geq 1/3$ ព្រោះ

$$S = x - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{x^2+x+1}{x+3}$$

$$S \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{x+3} \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x+3 \geq x+3 \quad \Leftrightarrow x \geq 0$$

ពិត។សញ្ញាស្មើកើតមាន ពេល $x = 0$ ។

ដូច្នេះ $\min S = 1/3$ ពេល $x = 0$ ។

176. ▲សន្មតថា $a \geq 0$ ។ បើ $a < 0$ នោះគុណពហុធានឹង(-1) ។ យើងសន្មតផងដែរថា $b \geq 0$ ។ បើ $b < 0$ នោះយើងយក $f(-x)$ ។

ជំនួស $x = 0; x = \pm 1$ ចូល$f(x)$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} -1 \leq c \leq 1 \ (1) \\ -1 \leq a+b+c \leq 1 \ (2) \\ -1 \leq a-b+c \leq 1 \ (3) \end{cases}$$

(2) និង(៣) នាំអោយ

$$\begin{cases} -1-c \leq a+b \leq 1-c \\ -1-c \leq a-b \leq 1+c \end{cases}$$

ដោយ $a \geq 0; b \geq 0; |c| \leq 1$ នោះ

$$\begin{cases} 0 \leq a+b \leq 2 \\ -2 \leq a-b \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \leq 4 \\ a^2-2ab+b^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 \leq 4 \qquad (4)$$

យើងមាន

$$K=\frac{8}{3}(a^2+b^2)-\frac{2}{3}b^2\le\frac{8}{3}(a^2+b^2)\le\frac{8}{3}.4=\frac{32}{3}$$

K មានតំលៃធំបំផុតពេល $b=0; a^2+b^2=4 \Rightarrow b=0; a=\pm 2$ ។

បើ $b=0; a=2; (2)\Rightarrow c=-1$ ។

បើ $b=0; a=-2; (2)\Rightarrow c=1$ ។

ដូច្នេះ $(a,b,c)=\{(2;0;-1);(-2;0;1)\}$ ។

177. ▲សន្មតថា $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$ ។ សន្មតថា $\min_{i\ne j}\left(a_i-a_j\right)^2>\frac{1}{100}$ នោះ

$$a_2-a_1>\frac{1}{10}\ \Rightarrow a_2>\frac{1}{10}$$
$$a_3-a_2>\frac{1}{10}\ \Rightarrow a_3>\frac{2}{10}$$
$$a_4-a_3>\frac{1}{10}\ \Rightarrow a_4>\frac{3}{10}$$
$$a_5-a_4>\frac{1}{10}\ \Rightarrow a_2>\frac{4}{10}$$
$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>\frac{1+2+3+4}{10}=1$$

មិនត្រឹមត្រូវ។

សន្មតថា $\min_{i\ne j}\left|a_i^2-a_j^2\right|>\frac{1}{36}$ នោះ

$$a_2^2-a_1^2>\frac{1}{36}\ \Rightarrow a_2>\frac{1}{6}$$
$$a_3^2-a_2^2>\frac{1}{36}\ \Rightarrow a_3>\frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$a_4^2-a_3^2>\frac{1}{36}\ \Rightarrow a_4>\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$a_5^2-a_4^2>\frac{1}{36}\ \Rightarrow a_5>\frac{\sqrt{4}}{6}$$
$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{10}>1$$

មិនត្រឹមត្រូវ។

178. ▲ <u>ដំនោះស្រាយទី១</u>

យើងមាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$
$$<\frac{2a}{a+(b+c)}+\frac{2b}{b+(c+a)}+\frac{2c}{c+(a+b)}=2$$

ដំនោះស្រាយទី២

តាង $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ ។

$a+b>c \quad\Leftrightarrow\quad 2y>0 \quad\Rightarrow\quad y>0$

$a+c>b \quad \Leftrightarrow \quad 2x>0 \quad \Rightarrow \quad x>0$

$b+c>a \quad \Leftrightarrow \quad 2z>0 \quad \Rightarrow \quad z>0$

ដូច្នេះ យើងបំលែង លក្ខខណ្ឌ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណមក $x,y,z>0$។

យើងមាន

$$\frac{x+y}{x+y+z+z}+\frac{y+z}{x+y+z+x}+\frac{z+x}{z+y+z+y}$$

$$<\frac{x+y}{x+y+z}+\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{z+x}{x+y+z}=2$$ ពិត។

179. ▲ តាង $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ នោះ $x,y,z>0$។

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$\left(a+b+c\right)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(x+y+z\right)^2 \geq$$

$$3\left[\left(x+y\right)\left(y+z\right)+\left(y+z\right)\left(z+x\right)+\left(z+x\right)\left(x+y\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right] \geq 0$$

ពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$។

ដូចគ្នាវិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង $xy+yz+zx>0$ ពិត ព្រោះ $x,y,z>0$

180. ▲យើងមាន

$$a^2+b^2>2ab$$
$$a+b>c \quad \Rightarrow a^2+b^2+2ab>c^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2+b^2+(a^2+b^2)>a^2+b^2+2ab>c^2$$
$$\Rightarrow 2a^2+2b^2-c^2>0$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$2b^2+2c^2-a^2>0$$
$$2c^2+2a^2-b^2>0$$

យើងនឹងបង្ហាញថា

$$(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2$$

យើងមាន

$$(2a^2+bc)^2-(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2)$$
$$=4a^2bc-2a^2(b^2+c^2)-4b^2c^2+2b^4+2c^4$$
$$=2(b^2-c^2)^2-2a^2(b-c)^2$$
$$=2(b-c)^2(b+c+a)(b+c-a) \geq 0$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$0<(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2$$
$$0<(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2b^2-c^2) \leq (2b^2+ac)^2$$
$$0<(2c^2+2a^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2) \leq (2c^2+ab)^2$$

គុណអង្គនឹងអង្គយើងទាញបានវិសមភាព។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a = b = c$ ។

181. ▲យើងទាញបាន

$$a \geq 0; b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow b^2 \leq 4ac = 4.2a.\frac{c}{2} \leq \left(2a + \frac{c}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 2b \leq 4a + c$$
$$\Rightarrow 2b - 4a \leq c$$
$$\Rightarrow 3b - 3a \leq a + b + c$$
$$\Rightarrow \frac{a + b + c}{b - a} \geq 3$$
$$\Rightarrow \min F = 3$$

182. ▲យើងមាន

$$S = bc \sin\frac{\alpha}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$
$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{2} = \cos(\alpha - 60°)$$

យើងមាន

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq bc\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)$$
$$\Leftrightarrow (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos(\alpha - 60°)) \geq 0$$

យើងមានសមភាពទាល់តែ $b = c$ និង $\alpha = 60°$ មានន័យថា ត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស។

183. ▲សន្មតថា $a \geq 0; c \geq 0; 4ac \geq b^2$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $b = 0$ ហើយវិសមភាពទៅជា $cg^2 \geq 0$ ។ បើ $a > 0$ នោះ

$$af^2 + bfg + cg^2 = a\left(f + \frac{b}{2a}g\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}g^2 \geq 0$$

ឥលូវយើងសន្មតថា $af^2 + bfg + cg^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់គូវ៉ិចទ័រ f, g ។ ជំនួស f ដោយ tg $(t \in \mathbb{R})$ យើងទាញបាន $(at^2 + bt + c)g^2 \geq 0$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t ដូច្នេះនាំអោយ $a \geq 0, c \geq 0, 4ac \geq b^2$។

184. ▲យើងមាន

$$\left(-a_i\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} a_j$$

$$n\left|a_i\right| = \left|\left(n-1\right)a_i - \left(-a_i\right)\right| = \left|\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left(a_i - a_j\right)\right|$$

និង

$$= \left|\sum_{i\neq j}\left(a_i - a_j\right)\right| \leq \sum_{i\neq j}\left|a_i - a_j\right|$$

$\Rightarrow$ $\quad n\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right| \leq 2\sum_{i<j}\left|a_i - a_j\right|$ $\quad\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

ចំពោះ $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = x$ និង $a_n = -\left(n-1\right)x$ យើងទាញបានអង្គទាំង២ស្មើគ្នា។

185. ▲ដំនោះស្រាយទី១

ជាដំបូងយើងសន្មតថា កត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំរបស់វិសមភាពមានតំលៃវិជ្ជមានរឺសូន្យ។

យើងមាន $b-1+\frac{1}{c}=b\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=b\left(1+a-\frac{1}{b}\right)$

$$\Rightarrow \quad \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=b\left(a^2-\left(a-\frac{1}{b}\right)^2\right)\le ba^2$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le cb^2$$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le ac^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]^2\le \left(abc\right)^2=1 \quad \text{ពិត។}$$

ករណីមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន ឧទាហរណ៏ $a-1+\frac{1}{b}<0$ នោះ $a<1$ ហើយ $b>1$។ ក្នុងករណីនេះ $b-1+\frac{1}{c}>0$ និង $c-1+\frac{1}{a}>0$ ។ ដូច្នេះបើមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន នោះ មានតែកត្តាមួយនោះប៉ុណ្ណោះ ដែល អវិជ្ជមាន ដូច្នេះ ផលគុណនៃកត្តាទាំងបីនេះអវិជ្ជមាន ដូច្នេះតូចជាង១។

ដំនោះស្រាយទី២

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\left(a-\left(abc\right)^{1/3}+\frac{\left(abc\right)^{2/3}}{b}\right)\left(b-\left(abc\right)^{1/3}+\frac{\left(abc\right)^{2/3}}{c}\right)\times$$

$$\times\left(c-\left(abc\right)^{1/3}+\frac{\left(abc\right)^{2/3}}{a}\right)\le abc$$

ជំនួស $a=x^3,b=y^3,c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$

$$\left(x^3-xyz+\frac{\left(xyz\right)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{\left(xyz\right)^2}{z^3}\right)\times$$

$$\times\left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \le x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2y - y^2z + z^2x)(y^2z - z^2x + x^2y)(z^2x - x^2y + y^2z)$$

$$\le x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^3y^3z^3 + \sum_{\text{cyclic}} x^6y^3 \ge \sum_{\text{cyclic}} x^4y^4z + \sum_{\text{cyclic}} x^5y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x^2y)(y^2z)(z^2x) + \sum_{\text{cyclic}} (x^2y)^3 \ge \sum_{\text{sym}} (x^2y)^2 (y^2z)$$

តាង $u = x^2y, v = y^2z, w = z^2x$។ យើងមាន $u, v, w > 0$

$$\Rightarrow \quad 3uvw + \sum_{\text{cyclic}} u^3 \ge \sum_{\text{sym}} u^2v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{cyclic}} u(u-v)(u-w) \ge 0$$ ពិត តាមវិសមភាព ឈ័រ។

186.

187. ▲ដោយ $0 < x < 1$ នោះវិសមភាពដែលអោយអាចសរសេរជា

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \ge 9$$
$$(x+1)(1-x+1) \ge 9x(1-x)$$
$$2 + x - x^2 \ge 9x - 9x^2$$
$$(2x-1)^2 \ge 0$$

ពិត។

188. ▲យើងមាន

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$= \left(\frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6}\right) + \left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \ge 2 + 2 + 2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a = b$។

189. ▲យើងមាន

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \le \frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}} + \frac{y}{2\sqrt{x^2y^4}}$$

$$\le \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}$$

190. ▲យើងមាន

$$0 \le \left(x - \sqrt{y^2+1}\right)^2 + \left(y - \sqrt{x^2+1}\right)^2$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 \ge x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ $\begin{cases} x = \sqrt{y^2+1} \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2$

មិនអាច។ ដូច្នេះអង្គទី១ធំជាងអង្គទី២ដាច់ខាត។

191. ▲វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \ge 0$$ ពិតជានិច្ច។

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា មានតែ $x = y = z$។

192. ▲តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ នោះ $x, y, z > 0$។

វិសមភាពសមមូលនឹង

$(x + 2y + z)(x + y + 2z)(2x + y + z) \ge 64xyz$

យើងមាន

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= (x+y) + (y+z) \\ &\ge 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} \\ &\ge 4\left(xy^2z\right)^{1/4} \end{aligned}$$

ដូចគ្នា $x + y + 2z \ge 4\left(xyz^2\right)^{1/4}; 2x + y + z \ge 4\left(x^2yz\right)^{1/4}$ ។ ដូច្នេះ

$(x + 2y + z)(x + y + 2z)(2x + y + z)$

$$\ge 64\left(xy^2z.xyz^2.x^2yz\right)^{1/4} = 64xyz$$ ពិត។

193. ▲តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ ។ ដូច្នេះ $a, b, c > 0$។ យើងមាន

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y}$$

$$= \frac{(a-b)c}{b} + \frac{(b-c)a}{c} + \frac{(c-a)b}{a}$$

$$= \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{bc}{a} - a - b - c$$

តែថា $\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\right)=a\frac{b^2+c^2}{2bc}\geq a$ ទៅជាស្មើគ្នា ទាល់តែ $b=c$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right)\geq c$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}\right)\geq b$$

បូកអង្គនៃវិសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c\geq 0$ ។ ដូច្នេះ វិសមភាពពិត។ សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b=c$ មានន័យថា $x=y=z$ ។

194. ▲តាង $x=a+b-c, y=b+c-a, z=c+a-b$ ។

ដូច្នេះ $x,y,z>0$ និង $a=\frac{x+z}{2}, b=\frac{y+x}{2}, c=\frac{z+y}{2}$ ។ យើងមាន

$$2(x+y)\geq x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើ $x=y$ ។

ដូច្នេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}\sqrt{x+y}=2\sqrt{b}$$

ដូចគ្នា $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq 2\sqrt{c}$

$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\leq 2\sqrt{a}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាព យើងទាញបានវិសមភាពពិត។

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

195. ▲<u>ដំនោះស្រាយទី១</u>

យើងមាន $(a-b)\left(a^2-b^2\right)\geq 0 \Rightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងមានតែ $a=b$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{a}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{b}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$$

$$\leq\frac{c+b+a}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

ដំណោះស្រាយទី២

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)abc$$

$$\le 2\left(a^3+b^3+abc\right)\left(b^3+c^3+abc\right)\left(c^3+a^3+abc\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}}\left(a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3\right)$$

$$\le \sum_{\text{sym}}\left(a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+a^7bc+2a^5b^2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}}\left(2a^6b^3-2a^5b^2c^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}}a^6b^3c^0\ge\sum_{\text{sym}}a^5b^2c^2$$

ពិតតាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ ព្រោះ $\left(6,3,0\right)$ម៉ាស្ទូរ $\left(5,2,2\right)$។

196. ▲យើងមាន

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= \left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)\\ &= \left(a+b\right)\left[\left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)+a^2b^2\right]\\ &\ge \left(a+b\right)a^2b^2 \quad \text{ព្រោះ } \left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{ab}{a^5+b^5+ab} &\le \frac{ab}{\left(a+b\right)a^2b^2+ab}\\ &= \frac{1}{ab\left(a+b\right)+1}\\ &= \frac{1}{ab\left(a+b+c\right)}=\frac{c}{a+b+c} \end{aligned}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា ចំពោះតួផ្សេងទៀត។ យើងទាញបាន

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$$

$$\le\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

សមមភាពកើតមានពេល $a=b=c$។

197.▲ តាង $A=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

$$B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

ដូច្នេះ

$$A - B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j b_i b_j$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ សំនើពិត។

198.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 = n^2$$

199.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(a+b+c+d\right)^2 \leq \left(1+1+1+1\right)\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$$

$$= 4\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(8-e\right)^2 \leq 4\left(16 - e^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad e\left(5e - 16\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq e \leq \frac{16}{5}$$

ដើម្បីអោយ $e = \frac{16}{5}$ លក្ខខណ្ឌគឺ $a = b = c = d$ និង $a + b + c + d = \frac{24}{5}$ $\Rightarrow$

$a = b = c = d = \frac{6}{5}$។

200.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{s}\right) \geq n^2$$

យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n} a_i = n - 1$$

$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right) \ge \frac{n^2}{n-1}$ ពិត

ម៉្យាងវិញទៀត $\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s} = -n + \sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}$

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right) \ge n^2$$

ដោយ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right) \ge n^2$

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s} \ge -n + n^2 = n(n-1)$ ពិត

យើងមាន $\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$

$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right) \ge \frac{s^2}{n}$ ។

តែថា $\left(\sum_{i=1}^{n}\left[a_i(s-a_i)\right]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 = s^2$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right) \ge \frac{s^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left[a_i(s-a_i)\right]\right)} = \frac{s^2}{s\sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

$\ge \frac{s^2}{s^2 - \frac{s^2}{n}} = \frac{n}{n-1}$ ពិត។

201.▲ ក) តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1 \le a_2 \le a_3$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1 + a_2 > a_3$ ទៅបានហើយ។ យើងមាន

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 > 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)\times$$

$$\times(a_1 - a_2 + a_3) > 0$$

កត្តានិមួយៗសុទ្ធតែវិជ្ជមាន លើកលែងតែ $\left(a_1 + a_2 - a_3\right)$ ដែលមិនទាន់ដឹង។ តែ ផលគុណរបស់កត្តាទាំងអស់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $\left(a_1 + a_2 - a_3\right)$ ត្រូវតែវិជ្ជមាន។

ខ) ករណី $n = 3$ បានស្រាយបញ្ជាក់រួចក្នុងសំនួរក)។ យើងសន្មតថា $n \geq 4$ ។

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា a_1, a_2, a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(n-1\right)\left(a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4\right) < \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)^2$$

$$= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \sum_{k=4}^{n} a_k^4\right)^2$$

$$\leq \left(n-1\right)\left(\frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2}{4} + \frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2}{4} + \sum_{k=4}^{n} a_k^4\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right) < \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2$ ហើយតាម សំនួរ ក) យើងទាញបានថាសំនើពិត។

202.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$S_2 - a_i^2 \geq \frac{1}{n-1}\left(S_1 - a_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_2 - a_i^2}{\left(S_1 - a_i\right)} \geq \frac{1}{n-1}\left(S_1 - a_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_k} \geq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(S_1 - a_k\right) = S_1$$

203.▲ តាង $E = \left\{\left(a,b,c,d\right) \in \mathbb{R} > 0 \;/\; a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3\right\}$ និង f ជាអនុគមន៍ កំនត់លើ E ដោយ $f\left(a,b,c,d\right) = \frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} - 1$ ។

យើងឃើញថា ចំពោះ $\forall \lambda \in \mathbb{R} > 0 :\ \left(a,b,c,d\right) \in E$ និង $f\left(a,b,c,d\right) \geq 0$ ទាល់តែនិងមានតែ $\left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right) \in E$ និង $f\left(\lambda^3 a, \lambda^3 b, \lambda c, \lambda d\right) \geq 0$ ។

ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $\left(a,b,c,d\right) \in E$ និង $a^2 + b^2 = 1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់ភាពទូទៅឡើយ។ ដូច្នេះ $c^2 + d^2 = 1$។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត នាំអោយ $\left(\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\right)(ac+bd)\ge\left(c^2+d^2\right)^2=1$

តែយើងមាន $ac+bd\le\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\ge\frac{1}{ac+bd}\ge1$$

204.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$
$$\le\sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}$$

យើងមាន $\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិត។

យើងមានសមភាព លុះត្រាតែ $\frac{x-1}{x^2}=\frac{y-1}{y^2}=\frac{z-1}{z^2}$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow$ $x=y=z=\frac{3}{2}$ ។

205.▲ តាង $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$។ លក្ខខណ្ឌ $xyz\ge xy+yz+zx\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le1$

$$\Rightarrow\quad a+b+c\le1$$

វិសមភាព $xyz\ge3\left(x+y+z\right)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$ ។

យើងមាន $1\ge\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$

ហើយតាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន $ab+bc+ca\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}$

មានន័យថា $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$។ ដូច្នេះ នាំអោយ $1\ge3\left(ab+bc+ca\right)$ ពិត។

206.▲ តាង $a=\tan x,b=\tan y,c=\tan z$ នោះ x,y,z ជាមុំនៃត្រីកោណស្រួច។ ដូច្នេះ វិសមភាពសមមូលនឹង $\max\left(\tan x,\tan y,\tan z\right)\ge\sqrt{3}$

តែថា មានមុំមួយរបស់ត្រីកោណ ឧទាហរណ៍ x ដែលធំជាងរឺស្មើ $\frac{\pi}{3}$ (បើ តូចជាង $\frac{\pi}{3}$ ទាំងអស់គ្នា នោះ ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ មានតំលៃតូចជាង π)។ ដោយអនុគមន៍ $\tan$ កើនលើ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ នោះ $\tan x \geq \sqrt{3}$ ។

207.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j\right)^2 \\ &\geq 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(2\sum_{i<j} x_i x_j\right) \text{ វិសមភាពកូស៊ី} \quad (១) \\ &= 8\sum_{i<j}\left(x_i x_j \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\ &\geq 8\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \quad (២)\end{aligned}$$

យើងមានសមភាព(២) ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ ដែលស្មើសូន្យ។ ឧទាហរណ៍ $x_3 = \cdots = x_n = 0$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមានសមភាព(១) ទាល់តែនិងមានតែ $2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2$ មានន័យថា $x_1 = x_2$ ។

ដូច្នេះ $C = \frac{1}{8}$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$តួ ដែលស្មើសូន្យ ហើយតួពីរទៀតស្មើគ្នា។

208.▲ យើងមាន

$$P^2 = (xy + yz + zt + tx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(y^2 + z^2 + t^2 + x^2) = 1$$

ដូច្នេះ $-1 \leq P \leq 1$ ។

បើ $x = z = \frac{1}{2}; y = t = -\frac{1}{2}$ នោះ $x + y + z + t = 0; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ ។ ហើយ $P = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ។ ដូច្នេះ $P_{\min} = -1$ ។

យើងមាន $P = (x + z)(y + t) = -(y + t)^2 \leq 0$ ។ បើ $x = y = \frac{1}{2}; z = t = -\frac{1}{2}$ នោះ $P = 0$ ។

ដូច្នេះ $P_{\max} = 0$ ។

ជាសរុប $P_{\min} = -1$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x = z = \frac{1}{2}; y = t = -\frac{1}{2}$ ។

$P_{\max} = 0$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x = y = \frac{1}{2}; z = t = -\frac{1}{2}$ ។

209.▲ ដោយចំនួនចំលាស់មានចំនួនកំនត់ (ទាំងអស់មាន $n!$ របៀប) នោះ មានមួយបែបដែល S_σ មានតំលៃធំបំផុត (ដូចគ្នា តូចបំផុត)។ តាង $i<j$ ជាសន្ទស្សន៍២, σ ជាចំលាស់នៃ $\{1,2,\ldots,n\}$ ហើយសន្មតថា $\sigma(i)>\sigma(j)$។ ដូច្នេះ $b_{\sigma(j)}\le b_{\sigma(i)}$ ព្រោះស្វ៊ីត (b_k) កើន។ តាង σ' ជាចំលាស់ដែលដូចគ្នានឹង σ តែខុសគ្នាត្រង់ i,j ដែល $\sigma'(j)=\sigma(i)$ និង $\sigma'(i)=\sigma(j)$។ ដូច្នេះ
$S_{\sigma'}-S_\sigma=(a_j-a_i)(b_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)})$។

– បើ $a_i<a_j$ និង $b_{\sigma(j)}<b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}>S_\sigma$ មានន័យថា S_σ មិនមែនធំបំផុតទេ

– បើ $a_i=a_j$ រឺ $b_{\sigma(j)}=b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}=S_\sigma$

ដូច្នេះ ជំនួស σ ដោយ σ' ផលបូកមិនថយចុះទេ រឺក៏អាចធំជាងមុន។
បើ $\sigma(1)\ne 1$ នោះ ចំពោះ $i=1$ និង j ដែល $\sigma(j)=1$ យើងមានចំលាស់ σ' មួយដែល $\sigma'(1)=1$ ដោយរក្សាតំលៃផលបូកនៅដដែល។ ដូចគ្នា ចំពោះ $i=2,3,\ldots,n-1$ រហូតទទួលបាន $\sigma'(i)=i$ ដែលពេលនោះផលបូកមានតំលៃ ស្មើ S_σ រឺក៏ធំជាង S_σ។ ដូច្នេះផលបូកមានតំលៃធំបំផុតពេល $\sigma(i)=i$។
ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីតូចបំផុត។

210.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង $\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\le\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$
វិសមភាពក្រោយនេះពិត តាមវិសមភាពតំរៀប។

211.▲ មាន $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$។ តាង $a_1=\sin^3x; a_2=\cos^3x$ និង $b_1=\frac{1}{\cos x}; b_2=\frac{1}{\sin x}$ ។
យើងឃើញថា បើ $a_1\le a_2$ នោះ $b_1\le b_2$ ហើយ បើ $a_1\ge a_2$ នោះ $b_1\ge b_2$។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប

$$\begin{aligned}f(x)=a_1b_1+a_2b_2&\ge a_1b_2+a_2b_1\\&=\sin^3x\frac{1}{\sin x}+\cos^3x\frac{1}{\cos x}\\&=\sin^2x+\cos^2x=1\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងដឹងថា $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.0$ ដូច្នេះ តំលៃតូចបំផុតរបស់ f គឺស្មើ ១។

212.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\ge b\ge c$ ។ ដូច្នេះ $a^2\ge b^2\ge c^2$ និង $ab\ge ac\ge bc$ ។
តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន
$a^3+b^3+c^3=a^2a+b^2b+c^2c\ge a^2b+b^2c+c^2a$

និង $a^2b+b^2c+c^2a=(ab)a+(ac)c+(bc)b \ge (ab)c+(ac)b+(bc)a=3abc$

213.▲ គេអោយ $n\ge 1$ ។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ មានតំលៃតូចបំផុត ពេល $a_1\le a_2\le ...\le a_n$ ។

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌបែបនេះ ($a_1\le a_2\le ...\le a_n$) ហើយ ដោយសារ $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលខុសគ្នាពីរៗ នោះ យើងទាញបាន $a_i\ge i$ ចំពោះគ្រប់ i។

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

214.▲ <u>របៀបទីមួយ៖</u> យើងរៀប a_i តាមលំដាប់មួយដែល $a_{k(1)}\le a_{k(2)}\le ...\le a_{k(n)}$។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a_{k(1)}}\ge\frac{1}{a_{k(2)}}\ge ....\ge\frac{1}{a_{k(n)}}$$

ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+...+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}=a_1^2\left(\frac{1}{a_2}\right)+a_2^2\left(\frac{1}{a_3}\right)+...+a_n^2\left(\frac{1}{a_1}\right)$$

$$\ge a_{k(1)}^2\left(\frac{1}{a_{k(1)}}\right)+a_{k(2)}^2\left(\frac{1}{a_{k(2)}}\right)+...+a_{k(n)}^2\left(\frac{1}{a_{k(n)}}\right)$$

$$=a_1+a_2+...+a_n$$

<u>របៀបទីពីរ</u>

ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,2,...,n\}$ យើងមាន $\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+a_{i+1}\ge 2a_i$ ។

$$\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}\ge 2\sum_{i=1}^{n}a_i$$

ដោយយក $a_{n+1}=a_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i$

$$\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\ge\sum_{i=1}^{n}a_i$$

215.▲ យើងមាន

$$(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})^2$$
$$=\left[\sqrt{x^{1998}(py+qz)}.\sqrt{\frac{x^{2000}}{py+qz}}+\sqrt{y^{1998}(pz+qx)}.\sqrt{\frac{y^{2000}}{pz+qx}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{z^{1998}(px+qy)}.\sqrt{\frac{z^{2000}}{px+qy}}\right]^2$$
$$\leq [x^{1998}(py+qz)+y^{1998}(pz+qx)$$
$$+z^{1998}(px+qy)].\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]$$
$$=[p(x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x)$$
$$+q(x^{1998}z+y^{1998}x+z^{1998}y)]\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right] \qquad (1)$$

យើងមាន

$$x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x\leq x^{1999}+y^{1999}+z^{1999} \qquad (2)$$

ព្រោះតាមវិសមភាពតំរៀប និងដោយសារ*(២)*មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y,z ដែលយើងអាចសន្មតថា $x\leq y\leq z$ បាន នោះ

$$a_1=x^{1998}\leq a_2=y^{1998}\leq a_3=z^{1998};$$
$$b_1=x\leq b_2=y\leq b_3=z$$

នោះដោយយក $b_{\sigma(i)}=\{b_2;b_3;b_1\}$ យើងទាញបាន

$$S_\sigma=\sum_1^3 a_ib_{\sigma(i)}=x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x\leq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$=x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}$$

ពិត។ ដូច្នេះវិសមភាព(១)ទៅជា

$$(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})^2$$
$$\leq (p+q)(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\geq\frac{x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}}{p+q}$$

216.▲ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n$$
$$a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n\geq a_1b_2+a_2b_3+..+a_nb_1$$
$$\ldots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n\geq a_1b_n+a_2b_1+..+a_nb_{n-1}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+..+a_nb_n\right)$$
$$\geq\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត។
ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីស្វ៊ីត $\left(b_n\right)$ រៀបតាមលំដាប់ច្រាសមកវិញ។

217.▲ <u>វិធីទី១</u>

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$ ។

$\Rightarrow \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{a+c} \leq \dfrac{1}{b+c}$

តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=a.\frac{1}{b+c}+b.\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}$$
$$\geq \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left(b+c\right)+\left(a+c\right)+\left(a+b\right)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$\geq \frac{1}{6}3\sqrt[3]{\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\frac{1}{a+c}\frac{1}{a+b}}$$
$$=\frac{3}{2}$$ ពិត

វិធីទី២

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$ ។ $\Rightarrow \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{a+c} \leq \dfrac{1}{b+c}$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=a.\frac{1}{b+c}+b.\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}$$
$$\geq a\frac{1}{c+a}+b\frac{1}{a+b}+c\frac{1}{b+c}$$

និង $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq a\frac{1}{a+b}+b\frac{1}{b+c}+c\frac{1}{a+c}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq a\frac{1}{c+a}+b\frac{1}{a+b}+c\frac{1}{b+c}$$
$$+a\frac{1}{a+b}+b\frac{1}{b+c}+c\frac{1}{a+c}$$
$$=3$$

$\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

វិធីទី៣

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$2\sum_{\text{cyclic}} a(a+b)(a+c) \ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}} a^3 \ge \sum_{\text{sym}} a^2 b$$

218.▲ តាង $S = \dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c}$

$$x = b+c+d, y = c+d+a, z = d+a+b, t = a+b+c$$

ដោយផលបូក S មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c,d នោះ យើងអាចសន្មតថា $a \ge b \ge c \ge d$ ។

$\Rightarrow \quad a^n \ge b^n \ge c^n \ge d^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ និង $\dfrac{1}{x} \ge \dfrac{1}{y} \ge \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{1}{t}$ ។

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge ab + bc + cd + da = 1$។

តាមវិសមភាពឆេប៊ីសិវ យើងមាន

$$S = a^3\frac{1}{x} + b^3\frac{1}{y} + c^3\frac{1}{z} + d^3\frac{1}{t}$$

$$\ge \frac{1}{4}\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)$$

និង $\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \ge \dfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(a+b+c+d\right)$

$$\ge \frac{1}{4}(1)(a+b+c+d) = \frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

យើងមាន $x + y + z + t = 3(a+b+c+d)$

$$\Rightarrow \quad S \ge \frac{1}{16}(a+b+c+d)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)$$

$$\ge \frac{1}{48}(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) \ge \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

219.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \ge b \ge c$។ ដូច្នេះ $a^n \ge b^n \ge c^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ និង $\dfrac{1}{b+c} \ge \dfrac{1}{c+a} \ge \dfrac{1}{a+b}$ ។

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \ge \frac{a^n}{a+b} + \frac{b^n}{b+c} + \frac{c^n}{c+a}$$

និង $$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{a^n}{c+a}+\frac{b^n}{a+b}+\frac{c^n}{b+c}$$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right)$$

តាមវិសមភាពឆេបីសិវ

$$a^n+b^n\ge\frac{1}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)\left(a+b\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a^n+b^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}\right)$$

ដូចគ្នា $$\frac{b^n+c^n}{b+c}\ge\frac{1}{2}\left(b^{n-1}+c^{n-1}\right)$$

$$\frac{c^n+a^n}{c+a}\ge\frac{1}{2}\left(c^{n-1}+a^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

220.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x\le y\le z$។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}\le\frac{1}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}\le\frac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}$$

តាមវិសមភាពឆេបីសិវ យើងទាញបាន

$$\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\ge$$

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\left[\frac{1}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{1}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\right]$$

$$=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\frac{3+x+y+z}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)\left(1+x\right)}$$

តាង $\dfrac{x+y+z}{3}=a$ ។ តាមវិសមភាពរវាងតំលៃមធ្យម យើងមាន

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=a^3$$

$$3a=x+y+z\ge3\left(xyz\right)^{\frac{1}{3}}=3$$

$$\left(1+y\right)\left(1+z\right)\left(1+x\right)\le\left[\frac{\left(1+x\right)+\left(1+y\right)+\left(1+z\right)}{3}\right]^3$$

$= \left(1 + a\right)^3$

ដូច្នេះ

$$\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)} + \frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)} + \frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)} \geq a^3 \frac{6}{\left(1+a\right)^3}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $a^3 \dfrac{6}{\left(1+a\right)^3} \geq \dfrac{3}{4}$

ដោយ $a \geq 1$ នោះ $f\left(a\right) = 6\left(1 - \dfrac{1}{1+a}\right)^3 = \dfrac{6a^3}{\left(1+a\right)^3}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើសំណុំ $\mathbb{R}+$។ យើងមាន $f\left(a\right) \geq f\left(1\right) = \dfrac{3}{4}$ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

221.▲ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមាន គេមាន

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពខាងលើពិត ចំពោះ $n = 2$។ សន្មតថា វិសមភាពខាងលើពិត រហូតដល់ $n = 2^{k-1}$, $k > 2$។ ដូច្នេះ

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 ... a_{2^{k-1}}} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

តាង

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

$$x_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

យើងមាន

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \dfrac{a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$

$$\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 ... a_{2^k}}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិតចំពោះ គ្រប់ $n = 2^k, k \geq 1$។ ឥឡូវសន្មតថា $2^{k-1} < n < 2^k$។ តាង

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, ..., y_n = a_n$$

$$y_{n+1} = y_{n+2} = ... = y_{2^k} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

$$A = \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$$

$G = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$

យើងមាន

$$\frac{y_1 + \dots + y_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{y_1 \dots y_{2^k}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \left(2^k - n\right)\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}{2^k}$$

$$\geq \sqrt[2^k]{a_1 \dots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^{2^k - n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{nA + \left(2^k - n\right)A}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{G^n A^{2^k - n}}$$

$$\Rightarrow \quad A \geq G^{n/2^k} A^{1 - n/2^k}$$

$$\Rightarrow \quad A^{n/2^k} \geq G^{n/2^k}$$

$$\Rightarrow \quad A \geq G$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

222.▲ តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ $(x, y, z > 0)$ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$6xyz \leq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$$

វិសមភាពនេះពិត ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តមធ្យមធរណីមាត្រ សំរាប់ $x^2y, xy^2, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2$ ។

223.▲ យើងមាន

$$(n!)^{2/n} = \left((1.2.\dots n)^{\frac{1}{n}}\right)^2 \leq \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

224.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$8a^2b^3c^3 \leq 2a^8 + 3b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^2c^3 \leq 3a^8 + 2b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^3c^2 \leq 3a^8 + 3b^8 + 2c^8$$

បូកវិសមភាពអស់នេះបញ្ចូលគ្នា ហើយចែកនឹង $3a^3b^3c^3$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលចង់បាន។

225.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$(n + k - 1)x_1^n x_2 \dots x_k \leq n x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \dots + x_k^{n+k-1}$$
$$(n + k - 1)x_1 x_2^n \dots x_k \leq x_1^{n+k-1} + n x_2^{n+k-1} + \dots + x_k^{n+k-1}$$
$$\dots \quad \dots$$
$$(n + k - 1)x_1 x_2 \dots x_k^n \leq x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \dots + n x_k^{n+k-1}$$

បូកវិសមភាពទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា បន្ទាប់មកចែកនឹង $(n + k - 1)$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

226.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ និង

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geq n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}} = n\frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$$

227.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \leq y \leq z$ ។

តាង $f\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right)$

យើងមាន

$$f\left(x,y,z\right) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right)$$
$$= y^2 + z^2 + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz}$$
$$= \left(y - z\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\left(\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 + 1 - 2x\right)$$
$$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2\left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right)$$

ដោយ $x \leq y \leq z$ នោះ $y + z - 2x \geq 0$ ។

$\Rightarrow \quad f\left(x,y,z\right) - f\left(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}\right) \geq 0$ ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y = z$។

តាង $a = x$ និង $b = \sqrt{yz}$។ ដូច្នេះ $a,b > 0$ និង $ab^2 = 1$។

យើងមាន $\qquad f\left(a,b,b\right) = a^2 + a + 2b - 4ab$

$$= \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 2b - \frac{4}{b}$$
$$= \frac{1}{b^4}\left(2b^5 - 4b^3 + b^2 + 1\right)$$
$$= \frac{1}{b^4}\left(b - 1\right)^2\left(2b^3 + 4b^2 + 2b + 1\right)$$

≥ 0 ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $b = 1$

ដូច្នេះ $f\left(x,y,z\right) \geq f\left(a,b,b\right) \geq 0$ ហើយស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y = z, b = 1, xyz = 1 \Rightarrow$ $x = y = z = 1$។

228.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$\geq 10\left(a^2b^2c^2d^2ab.ac.ad.bc.bd.cd\right)^{\frac{1}{10}} = 10\left(a^5b^5c^5d^5\right)^{\frac{1}{10}} = 10$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $a = b = c = d = 1$ ។

229. យើងមាន

$$\left(a+b+c\right)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$$
$$+3\left(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b\right)$$
$$\geq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\times 6\left(a^6b^6c^6\right)^{1/6}$$

(តាមវិសមភាពកូស៊ី)

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

230. បើអង្គខាងស្តាំនៃវិសមភាព អវិជ្ជមាន រឺ សូន្យ នោះវិសមភាពជាវិសមភាពដាច់ខាត។ ក្រៅពីនេះ យើងសន្មតថា $a = \max\left(a,b,c\right)$។ ដូច្នេះ $a+b-c$ និង $c+a-b$ វិជ្ជមានដាច់ខាត។ ដូច្នេះ កត្តាទីបីក៏វិជ្ជមានដែរ។ ដូច្នេះ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ។ ដូច្នេះ យើងតាង

$$a+b-c = x, b+c-a = y, c+a-b = z$$

មានន័យថា $x,y,z > 0$ ហើយ $a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{y+x}{2}, c = \frac{z+y}{2}$។

វិសមភាពទៅជា

$$\left(x+z\right)\left(y+x\right)\left(z+y\right) \geq 8xyz$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\left(x+z\right)\left(y+x\right)\left(z+y\right) \geq 2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy} = 8xyz$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែនិងមានតែ $x = y = z$ មានន័យថា $a = b = c$។

231. តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\prod_{k=1}^{n} a_k\left(1-a_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-a_k\right)\right)$$
$$\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-a_k\right)\right)^n$$
$$\leq \frac{\left(n-1\right)^n}{n^{2n}}$$

232. យើងមាន

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} = \left(b + \frac{1}{2a}\right)^2 + a^2 + \frac{3}{4a^2}$$
$$\geq a^2 + \frac{3}{4a^2}$$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $b = -\frac{1}{2a}$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a^4 = \frac{3}{4}$ និង $b = -\frac{1}{2a}$ ។

233. តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះ $n \geq 2$

$$\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad U_{n-1} < U_n$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V_{n-1}} < \frac{1}{V_n}$$

$$\Rightarrow \quad V_n < V_{n-1}$$

234. យើងតាង

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2}$$

ក្នុងសំនេរបន្ទាប់មកទៀតនេះ ចំពោះសន្ទស្សន៍ណាដែលធំជាង n មានន័យថាវាស្មើនឹងតំលៃនោះដក n ចេញ។

យើងសន្មតថា $a_1 = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$។ ដូច្នេះយក $i_1 = 1$ ។ តាង i_2 ជាសន្ទស្សន៍តាងអោយចំនួនធំបំផុតរវាង a_2 និង a_3 ហើយបើ $a_2 = a_3$ នោះយើងយក $i_2 = 2$។ ដូច្នេះ $i_2 \leq i_1 + 2$។

យើងបង្កើតស្វ៊ីត (i_k) មួយ ដោយកំនើនដូចតទៅនេះ៖

បើ គេបង្កើតបាន i_k រួចហើយ គេតាង i_{k+1} ជាសន្ទស្សន៍នៃចំនួនធំជាងគេរវាង a_{i_k+1} និង a_{i_k+2} ដោយ បើ $a_{i_k+1} = a_{i_k+2}$ យក $i_{k+1} = i_k + 1$។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ $i_{k+1} \leq i_k + 2$។

ដោយ $i_1 = 1$ នោះ $i_{k+1} \leq 1 + 2k$ ចំពោះគ្រប់ k។

ដោយ $a_1 = a_{n+1} = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ នោះ យើងមាន r ដែល $i_{r+1} = n+1$។ ដូច្នេះ $i_r = n-1$ រឺ $i_r = n$។ ដូច្នេះ $n-1 \leq i_r \leq 1 + 2(r-1)$។

$$\Rightarrow \quad r \geq \frac{n}{2} \qquad (១)$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right) \geq \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_{r+1}}} \quad (២)$$

$$\geq \frac{r}{2}\left(\frac{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_r}}{a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{r+1}}}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{(វិសមភាពកូស៊ី)}$$

$$=\frac{r}{2}\geq\frac{n}{4}$$

ដើម្បីអោយ $f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)=\frac{n}{4}$ គេត្រូវតែមាន (១) និង (២) ជាសមភាព។ តែសមភាព (២) នាំអោយ $r=n$ តែសមភាពនេះ មិនត្រូវគ្នានឹងសមភាព (១)។ ដូច្នេះ

$f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)>\frac{n}{4}$

235.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$2+a_i=1+1+a_i\geq 3\left(a_i\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}\left(2+a_i\right)\geq 3^n\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{3}}=3^n$$

236.▲ (១) ដោយa,b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន នោះគេមាន x,y ដែល $0<x,y<90°$ ហើយដែល $\tan x=a;\tan y=b$ ។ វិសមភាពនេះពិត បើ $a=b$។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $a\neq b$ រឺ សមមូលនឹង $x\neq y$ ។ ដូច្នេះ $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cos x$; $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}=\cos y$ ។ យើងមាន

$$1+ab=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}$$

ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$\cos x+\cos y\geq 2\sqrt{\frac{\cos x\cos y}{\cos(x-y)}} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow \quad \cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y\leq\frac{4\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

ដោយ $0<|x-y|<90°$ នោះ $0<\cos(x-y)<1$។ ដូច្នេះ $2\cos x\cos y\leq\frac{2\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$ ។

ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\cos^2 x+\cos^2 y\leq\frac{2\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

$$\Leftrightarrow \ \cos(x-y)[\cos^2 x+\cos^2 y] \le 2\cos x\cos y$$
$$\Leftrightarrow \ \cos(x-y)[\cos^2 x+\cos^2 y+2] \le 4\cos x\cos y$$
$$\Leftrightarrow \ \cos(x-y)[2\cos(x-y)\cos(x+y)+2] \le 2[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$
$$\Leftrightarrow \ \cos^2(x-y)\cos(x+y) \le \cos(x+y)$$
ពិត ព្រោះ $0<a,b\le 1$ យើងមាន $0<x,y<\frac{\pi}{4}$ ដូច្នេះ $0<x+y<\frac{\pi}{2}$ និង $\cos(x+y)>0$ ។

(២) យើងបំលែងវិសមភាព(*) ជា
$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \ge 2\sqrt{\frac{1/2[\cos(x+y)+\cos(x-y)\,]}{\cos(x-y)}}$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}\cos(x-y) \ge 2[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
$$\Leftrightarrow [1+\cos(x+y)][1+\cos(x-y)]\cos(x-y) \ge 2[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$
តាង $s=\cos(x+y)$ និង $t=\cos(x-y)$។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា
$$(1+s)(1+t)t \ge 2(s+t)$$
$$\Leftrightarrow \ 0 \le (1+s)t^2+(s-1)t-2s=(t-1)[(1+s)t+2s]$$
ដោយ $t\le 1$ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(1+s)t+2s\le 0$

ដោយ $ab\ge 3$ នោះ $\tan x\tan y\ge 3$ រឺសមមូលនឹង $\sin x\sin y \ge 3\cos x\cos y$ ។ នាំអោយ
$$\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)] \ge \frac{3}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$
$$\Rightarrow t\le -2s$$
ដោយ $1+s\ge 0$ នោះ $(1+s)t\le -(1+s)2s$ ។ យើងទាញបាន $(1+s)t+2s\le$ $-(1+s)2s+2s=-2s^2\le 0$ ដូចដែលចង់បាន។

237.▲ ចំពោះគ្រប់ i តាង $a_i=\dfrac{1}{1+x_i}$។ ដូច្នេះ $0<a_i<1, x_i=\dfrac{1-a_i}{a_i}$ និង $\sum_{i=1}^{n+1} a_i=1$។
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i=\frac{\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$
តាមវិសមភាពកូស៊ី

$1-a_i=\sum_{k\ne i} a_k \ge n\left(\prod_{k\ne i} a_k\right)^{1/n}$ ដោយអង្គទាំងពីស្មើគ្នាបើ a_k ស្មើគ្នាទាំងអស់។ ដូច្នេះ
$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right) \ge n^{n+1}\left(\prod_{k\ne 1} a_k\right)^{1/n}\cdots\left(\prod_{k\ne n+1} a_k\right)^{1/n}$$
$$=n^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i^n\right)^{1/n}$$
$$=n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1} a_i$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-a_i\right)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \geq n^{n+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើនិងមានតែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = n$ ។

238.▲ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k, j តាង $\alpha_{k,j} = \frac{x_{j+k}}{x_j}$ ដែលក្នុងបណ្តាសន្ទស្សន៍ទាំងអស់នេះ បើសន្ទស្សន៍ណាមួយ ធំជាង n យើងជំនួសវាដោយ តំលៃសមមូលតាម n ។ ឧទាហរណ៍ $\left(1+n\right)$ ជំនួសដោយ $1;(1+n \equiv 1 \bmod n)$ $\left(2+n\right)$ ជំនួសដោយ 2 ។ល។

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ k យើងមាន

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} = 1$$

$$= \alpha_{k,1}\alpha_{k,2}...\alpha_{k,n} = \frac{x_{1+k}}{x_1}\frac{x_{2+k}}{x_2}....\frac{x_{n+k}}{x_n} \text{ ។}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\left(s-x_j\right)}{x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - x_j\right)}{x_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(a_j\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_j} - 1\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_j \alpha_{k,j}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1} n\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= n\left(n-1\right)\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $x_1 = x_2 = ... = x_n$ ។ ដូច្នេះ $C\left(n\right) = n\left(n-1\right)$ ។

239.▲ ឧបមាថា $n_1, n_2, ..., n_k$ ជាចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់ $1,2,...,k$។ យើងមាន $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$។ ចំនួនបន្សំគូប៊ូលក្នុងប្រអប់ i មានតំលៃ $\binom{n_i}{2}$។ ដូច្នេះ ជាសរុបស្មើនឹង $\sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{2}$ ដែលយើងចង់អោយវាតិចបំផុត។

បើ មាន i,j ដែល $n_i - n_j \geq 2$ នោះ ដោយដកប៊ូលមួយចេញពីប្រអប់លេខ i ហើយយកទៅដាក់ក្នុងប្រអប់លេខ j យើងទាញបាន ចំនួនគូប៊ូលថយចុះ

$$\binom{n_i}{2}+\binom{n_j}{2}-\binom{n_i-1}{2}-\binom{n_j+1}{2}=n_i-n_j-1>0$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងបន្ថយចំនួនគូប៊ូល ដោយធ្វើយ៉ាងណាអោយចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់ពីរផ្សេងគ្នា មានចំនួនប៊ូលច្រើនជាងគ្នាមិនលើសពីមួយទេ។ ដូច្នេះ ប្រអប់និមួយមានប៊ូលចំនួន $\left[\frac{n}{k}\right]$ រឺ $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ ប៊ូល។

240.▲ តាង $P=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$

$$q=\frac{1}{(xyz)^{1/3}}$$

$$\Rightarrow \quad P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3q$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 3q^2$$

$$q\geq\frac{3}{x+y+z}=3$$

$$\frac{1}{xyz}=q^3$$

$$\Rightarrow \quad P\geq 1+3q+3q^2+q^3=(1+q)^3\geq(1+3)^3=64$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $x=y=z=\frac{1}{3}$ ។

241.▲ សំនើ

ចំពោះគ្រប់ $a,b>0$ គេមាន $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3}$ ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a=b$។

សំរាយបញ្ជាក់

$\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \quad 3\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq a^2 + ab + b^2$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ ពិត។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a = b$។

តាង $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$ និង

$a_i = x_i^3$ ចំពោះគ្រប់ i ។

យើងមាន $a_1 a_2 ... a_n = 1$ ហើយតាមសំនើខាងលើ

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^3 + x_j^3}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\left(a_i + a_j\right) \frac{a_i^2 - a_i a_j + a_j^2}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2}\right]$$

$$\geq \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_i + a_j\right)$$

$$= \frac{n-1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\geq \frac{n\left(n-1\right)}{3} \left(a_1 a_2 ... a_n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{n\left(n-1\right)}{3}$$

$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \geq \dfrac{n\left(n-1\right)}{3}$ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$។

242.▲ តាង $f\left(a, b, c, d\right) = abc + bcd + cda + dab - \dfrac{176}{27} abcd$

$= bc\left(a + d\right) + ad\left(b + c - \dfrac{176}{27} bc\right)$

$f\left(a, b, c, d\right)$ ជាទំនាក់ទំនងឆ្លុះ (បើគេប្តូរគ្នា រវាង a, b, c, d នោះ f នៅដដែល)។

១) ករណី $b + c - \dfrac{176}{27} bc \leq 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $f\left(a, b, c, d\right) \leq bc\left(a + d\right) \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

២) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f\left(a,b,c,d\right)\le bc\left(a+d\right)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b+c-\frac{176}{27}bc\right)$$

$$=f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $f\left(a,b,c,d\right)\le f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)$

$=f\left(b,\frac{a+d}{2},\frac{a+d}{2},c\right)$ ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី

$$\le f\left(\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$$=f\left(\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

$$\le f\left(\frac{1}{4},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2},\frac{1}{4}\right)$$

$$=f\left(\frac{b+c}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{a+d}{2}\right)$$

$\le f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{27}$ $\Rightarrow$ វិសមភាពពិត។

243.▲ តាង $P\left(X\right)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ ដោយ $a_i\ge 0$ ចំពោះ $i<n$ និង $a_n>0$ ។ យើងមាន $x_1,x_2,..,x_n>0$។

តាង $x_{n+1}=x_1$។

បើ $n=1$ អង្គទាំង២នៃវិសមភាព ស្មើគ្នា។

បើ $n\ge 2$ យើងមាន $P^2\left(X\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i^2X^{2i}+2\sum_{i<j}a_ia_jX^{i+j}$ ។

ចំពោះ $p\in\mathbb{N}^*$ តាង $S_p=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$S_p\ge\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

តែថា

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i^2S_{2i}+2\sum_{i<j}a_ia_jS_{i+j}$$

$$\geq\sum_{i=0}^{n}a_i^2+2\sum_{i<j}a_ia_j=P^2(1)$$

$\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)\geq nP^2(1)$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $x_1=x_2=...=x_n$។

244.▲ តាង $E=\left\{(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{R}^{n+*}\ /\ a_1+a_2+...+a_n=1\right\}$ និង f ជាអនុគមន៍មួយ កំនត់លើ E ដោយ

$$f(a_1,a_2,...,a_n)=n^2(n-1)\prod_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}P_k(a_1,a_2,...,a_n)$$

ដែល $P_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{a_k}\prod_{i=1}^{n}a_i$ ។

បើ សិនជាគ្រប់ a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ នោះគេមានពីរក្នុងចំនោមនោះ ឧទាហរណ៏ a_1,a_2 ដែល $a_1<m<a_2$ ដែល $m=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}$។

យើងមាន

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(a_1+a_2)A+a_1a_2B$$

ដែល $A=\prod_{i=3}^{n}a_i$ និង $B=n^2(n-1)\prod_{i=3}^{n}a_i+\sum_{i=3}^{n}\frac{P_i(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{a_1a_2}$

(បើ $n=2$ យើងតាង $A=1;B=n^2(n-1)$)។ យើងទាញបាន

$$f(m,a_1+a_2-m,\cdots,a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=B\left(m(a_1+a_2-m)-a_1a_2\right)$$
$$=B(m-a_1)(a_2-m)>0$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន $f(m,a_1+a_2-m,\cdots,a_n)<f(m,m,\cdots,a_n)<\cdots<f(m,m,\cdots,m)$ ។

ដូច្នេះ $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leq f(m,m,\cdots,m)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a_1=a_2=\cdots=a_n=m$។

តែ $m=\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \quad f\left(m,m,\cdots,m\right)=\frac{n^2\left(n-1\right)}{n^n}+n.\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n^3}{n^n}$$ ។

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n^{n-3}}.\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\geq n^2\left(n-1\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ ។

245.▲ តាង S ជាស្វ៊ែរ មានផ្ចិត O និង កាំ $R=1$ ។ តាង A_1,A_2,A_3,A_4 ជាបណ្ដាចំនុចស្ថិតលើ S ។ យើងមាន

$$\left(\prod_{i<j}A_iA_j^2\right)^{\frac{1}{6}}\leq\frac{1}{6}\sum_{i<j}A_iA_j^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{i<j}A_iA_j\leq\frac{1}{6^3}\left(\sum_{i<j}A_iA_j^2\right)^3$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល A_iA_j មានតំលៃថេរ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}A_iA_j^2 &=\sum_{i<j}\left(OA_i^2+OA_j^2-2\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OA_j}\right)\\ &=12R^2-2\sum_{i<j}\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OA_j}\end{aligned}$$

ហើយ

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right\|^2 &=\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right)\bullet\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right)\\ &=\sum_{i=1}^{4}OA_i^2+2\sum_{i<j}\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}\\ &=4R^2+2\sum_{i<j}\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -2\sum_{i<j}\overrightarrow{OA_i}.\overrightarrow{OA_j}=4R^2-\left\|\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\right\|^2\leq 4R^2$$ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល

$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ មានន័យថា O ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i ។ ដូច្នេះ

$$\sum_{i<j}A_iA_j^2\leq 16R^2$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i<j} A_iA_j \le \frac{1}{6^3}\left(16R^2\right)^3 = \frac{2^9}{3^3}R^6$$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល O ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i ហើយ បណ្ដាចំងាយ A_iA_j ស្មើគ្នាទាំងអស់ បើ $i \neq j$។ លក្ខខណ្ឌចុងក្រោយនេះ មានន័យថា $A_1A_2A_3A_4$ ជាចតុមុខនិយ័ត ដូច្នេះនាំអោយ O ជាអ៊ីសូបារីសង់របស់ A_i។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i<j} A_iA_j \le \frac{2^9}{3^3}R^6$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ករណី $A_1A_2A_3A_4$ ជាចតុមុខនិយ័ត។

246.▲ តាង $a_0 = 1-\left(a_1+a_2+...+a_n\right)$ ។ យើងមាន

$a_0 > 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$$

$$\frac{a_1a_2....a_n\left(1-a_1-a_2-...-a_n\right)}{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(1-a_1\right)\left(1-a_2\right)...\left(1-a_n\right)} = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}\left(1-a_k\right)}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងមាន

$$1-a_i = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - a_i = \sum_{k\neq i} a_k \ge n\left(\prod_{k\neq i} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{k=0}^{n}\left(1-a_k\right) \ge n^{n+1}\left(\prod_{k\neq 0} a_k\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{k\neq 1} a_k\right)^{\frac{1}{n}}...\left(\prod_{k\neq n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^{n+1}\prod_{k=0}^{n} a_k$$ ព្រោះ a_i និមួយៗមាន n ដង។

$$\Rightarrow \quad \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}\left(1-a_k\right)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$ ពិត។

សមភាពកើតមាន ពេល $a_0 = a_1 = ... = a_n = \frac{1}{n+1}$។

247.▲ តាមសម្មតិកម្ម $x_1; x_2$ និង $y_1; y_2$ ជាកូអរដោនេនៃចំនុចស្ថិតលើរង្វង់កាំរង្វាស់ c មានផ្ចិតនៅត្រង់គល់តំរុយ។ ដូច្នេះ $x_1 = c\cos\theta$; $x_2 = c\sin\theta$; $y_1 = c\cos\phi$; $y_2 = c\sin\phi$ ។ដូច្នេះ

$$S = 2 - c(\cos\theta + \sin\theta + \cos\phi + \sin\phi) + c^2(\cos\theta + \cos\phi + \sin\theta + \sin\phi)$$
$$= 2 - \sqrt{2}c\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)\right] + c^2\cos(\theta - \phi)$$
$$\leq 2 + 2\sqrt{2}c + c^2 = \left(\sqrt{2} + c\right)^2$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $\theta = \phi = \frac{5\pi}{4}$ មានន័យថា $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{-c\sqrt{2}}{2}$ ។

248.▲ <u>របៀបទី១</u>

តាង $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ យើងទាញបាន $xyz = 1$។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$\left[(y+z) + (z+x) + (x+y)\right]\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)$$

$$\geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{1/3}}{2} = \frac{3}{2}$$

របៀបទី២

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{4/3}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$ នោះ

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{x^9\left(y^3 + z^3\right)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} + 2\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 + \sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6$$

$$\geq 3\sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 + 6x^8y^8z^8$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right) + 2\left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right)$$

$$+\left(\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8\right) \geq 0$$

តួនិមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេងសុទ្ធតែមិនអវិជ្ជមាន តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ។

249.▲ <u>របៀបទី១</u>

យើងតាង

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}, y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}}, z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

យើងឃើញថា $x,y,z \in (0,1)$។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x + y + z \geq 1$។ យើងមាន

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1-x^2}, \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1-y^2}, \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{512} = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{y^2}{1-y^2}\right)\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $x + y + z \geq 1$ ដែល $0 < x,y,z < 1$ និង

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) = 512\left(xyz\right)^2$$

ឧបមាថា $1 > x + y + z$។ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right) \\
&> \left[\left(x+y+z\right)^2 - x^2\right]\left[\left(x+y+z\right)^2 - y^2\right]\left[\left(x+y+z\right)^2 - z^2\right] \\
&= \left(x+x+y+z\right)\left(y+z\right)\left(x+y+y+z\right)\left(z+x\right)\times \\
&\qquad \left(x+y+z+z\right)\left(x+y\right) \\
&\geq 4\left(x^2yz\right)^{1/4}.2\left(yz\right)^{1/2}.4\left(y^2zx\right)^{1/4}.2\left(zx\right)^{1/2}.4\left(z^2xy\right)^{1/4}.2\left(xy\right)^{1/2} \\
&= 512\left(xyz\right)^2
\end{aligned}$$

ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ។

របៀបទី២

យើងជំនួស

$$x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}$$

វិសមភាពទៅជា

$$xf\left(x^2 + 8yz\right) + yf\left(y^2 + 8zx\right) + zf\left(z^2 + 8xy\right) \geq 1$$

ដែល $f(t) = 1/\sqrt{t}$។ ត្រង់នេះ យើងន័រម៉ាល់វិសមភាពដោយ $x + y + z = 1$។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ហើយ $x + y + z = 1$ នោះដោយប្រើវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$xf\left(x^2+8yz\right)+yf\left(y^2+8zx\right)+zf\left(z^2+8xy\right)\geq$$
$$f\left(x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)\right)$$

យើងមាន $f\left(1\right)=1$។ ដោយអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាត នោះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$1\geq x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)$$

ដោយ $x+y+z=1$ នោះ យើងធ្វើអោយវិសមភាពនេះអូម៉ូសែន ជា

$$\left(x+y+z\right)^3\geq$$
$$x\left(x^2+8yz\right)+y\left(y^2+8zx\right)+z\left(z^2+8xy\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad 3\left[x\left(y-z\right)^2+y\left(z-x\right)^2+z\left(x-y\right)^2\right]\geq 0$$ ពិត។

របៀបទី៣

ពេលនេះ យើងន័រម៉ាល់វិសមភាពដោយ $xyz=1$ ម្តង។

តាង $x=\dfrac{bc}{a^2},y=\dfrac{ca}{b^2},z=\dfrac{ab}{c^2}$ នោះ $xyz=1$។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geq 1$$
$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{cyclic}}\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)}\geq\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)}$$
$$\Leftrightarrow\quad 8\left(x+y+z\right)+2\sqrt{\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)}\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{1+8x}$$
$$\geq 510\ (*)$$

ដោយ $xyz=1$ នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x+y+z\geq 3$$
$$\left(1+8x\right)\left(1+8y\right)\left(1+8z\right)\geq 9x^{8/9}.9y^{8/9}.9z^{8/9}=729$$
$$\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{1+8x}\geq\sum_{\text{cyclic}}\sqrt{9x^{8/9}}\geq 9\left(xyz\right)^{4/27}=9$$

$\Rightarrow$ (*) ពិត។

250.▲ តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$ ដែល $-\frac{\pi}{2}<x,y,z<\frac{\pi}{2}$។ នោះ $a^2+1=1/\cos^2 x, b^2+1=1/\cos^2 y, c^2+1=1/\cos^2 z$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពដោយ $\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z$ យើងទាញបាន

$$[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2\leq 1$$

យើងមាន

$$(ab+bc)\cos x\cos y\cos z=\sin x\sin y\cos z+\sin y\sin z\cos x$$
$$=\sin y\sin(x+z)$$

និង

$$(ca-1)\cos x\cos y\cos z = \sin z\sin x\cos y - \cos x\cos y\cos z$$
$$= -\cos y\cos(x+z)$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2 = [\sin y\sin(x+z) - \cos y\cos(x+z)]^2$$
$$= \cos^2(x+y+z) \leq 1$$

251.▲ <u>របៀបទី១</u>

តាង $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$ ។ យើងអាចសន្មតថា

$0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

ដោយ $x + y + z = 1$ នោះ $x \leq \frac{1}{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x,y,z) = (1-3x)yz + xyz + zx + xy \geq 0$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

ដោយ $1 - 2x \geq 0$ នោះ

$$f(x,y,z) = x(y+z) + yz(1-2x)$$

$$\leq x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)$$

$$= \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{4}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍មួយអថេរ

$F(x) = \frac{1}{4}(-2x^3 + x^2 + 1)$ ដែល $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

យើងមាន $F'(x) = \frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3} - x\right) \geq 0$ លើ $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ យើងទាញបាន

$$F(x) \leq F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ។

របៀបទី២

យើងបំលែងវិសមភាពទៅជាអូម៉ូសែន ដោយ

$$0 \le \left(xy + yz + zx\right)\left(x + y + z\right) - 2xyz \le \frac{7}{27}\left(x + y + z\right)^3$$

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$0 \le xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y$$ ពិត

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$7\sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y \ge 0$$

ដោយ

$$7\sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y$$

$$= \left(2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) + 5\left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right)$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^2y$$ និង $$3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \ge \sum_{\text{sym}} x^2y$$

បានហើយ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} 2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y &= \sum_{\text{cyclic}}\left(x^3 + y^3\right) - \sum_{\text{cyclic}}\left(x^2y + xy^2\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}}\left(x^3 + y^3 - x^2y - xy^2\right) \ge 0 \\ &= \sum_{\text{cyclic}}\left(x^2\left(x - y\right) - y^2\left(x - y\right)\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}}\left(x - y\right)^2\left(x + y\right) \ge 0 \end{aligned}$$

វិសមភាពទី២ សមមូលនឹង

$\sum_{\text{cyclic}} x\left(x - y\right)\left(x - z\right) \ge 0$ ពិត តាមវិសមភាពឈួរករណី $r = 1$។

252. ▲យើងមាន

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

$$= \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 1\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1\right) - 1$$

$$\ge 3\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\right) - 1$$

$$= 3\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) - 1$$
$$= 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) + \left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) - 1$$
$$\geq 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) + 3\left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{xyz}}\right) - 1$$
$$= 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right) + 2$$
$$= 2\left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

253. ▲តាង $a/b = p; b/c = q$ ។ ដូច្នេះ $d/c = a/b = p; a/d = b/c = q$ ។ យើងមាន

$$p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 4 \quad (1)$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = pq + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq} = \left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right)$$

លក្ខខណ្ឌ a, b, c, d ជាចំនួនពិតខុសគ្នា នាំអោយ $p \neq 1; q \neq; pq \neq 1$ ។

បើ $p > 0; q > 0$ នោះ

$$p + \frac{1}{p} \geq 2;$$
$$q + \frac{1}{q} \geq 2$$

(1) នាំអោយ $p + 1/p = 2; q + 1/q = 2 \implies p = q = 1$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយក្នុងចំនោម $p; q$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន សន្មតថា $p < 0$ ។ ដូច្នេះ

$$p + \frac{1}{p} \leq -2$$
$$(1) \implies q + \frac{1}{q} \geq 6;\ \left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right) \leq -12$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $p = -1; q + 1/q = 6 \implies q = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ។

យក $c = 1; \frac{d}{c} = p = -1 \implies d = -1$ ។ យក $q = 3 - 2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{b}{c} = q = 3 - 2\sqrt{2} \implies b = 3 - 2\sqrt{2}$$
$$\frac{a}{b} = -1 \implies a = -3 + 2\sqrt{2}$$

ដូច្នេះតំលៃធំបំផុតស្មើ -12 ។ តំលៃធំបំផុតនេះកើតមាន ឧទាហរណ៍នៅត្រង់ចំនុច

$$a = -3 + 2\sqrt{2}; b = 3 - 2\sqrt{2}; c = 1; d = -1$$

254. ▲ សន្មតថា $a \le b \le c$ ។ យើងមាន $c < a + b \implies 2c < a + b + c = 2 \implies c < 1$ ។

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) + 2abc$$
$$= 4 - 2(ab+bc+ca) + 2abc$$
$$2 - 2(1-a)(1-b)(1-c) = 4 - 2(ab+bc+ca) + 2abc$$

ដូច្នេះ $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 2 - 2(1-a)(1-b)(1-c) < 2$ ព្រោះ $a < 1; b < 1; c < 1$ ។ ដោយ $a \le b \le c < 1$ នោះ $1-a, 1-b, 1-c$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} \ge \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}$$
$$\implies (1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{1}{27}$$
$$\implies a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \ge 2 - \frac{2}{27} = \frac{52}{27}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a = b = c$ ។

255. ▲ ក) យក $p = \dfrac{m}{m+n}$ និង $q = \dfrac{n}{m+n}$ ដែល m, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{ma+nb}{m+n} \ge \sqrt[m+n]{a^m b^n}$$ ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ី។

ខ) យើងជ្រើសរើសស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទាន $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ដែល $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$ ។

តាង $b_i = 1 - a_i$ យើងទាញបាន $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ យើងទាញបាន

$$a_n x + b_n y \ge x^{n_n} y^{b_n}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n x + b_n y \ge \lim_{n\to\infty} x^{n_n} y^{b_n}$$
$$\Rightarrow \quad px + qy \ge x^p y^q$$

គ) តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\ln\left(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\right) \ge \alpha_1 \ln\left(x_1\right) + \cdots + \alpha_n \ln\left(x_n\right)$$
$$= \ln\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right)$$

ឃ) តាង $u = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}; v = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$ ។ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\frac{a_i}{u} \times \frac{b_i}{v} \le \frac{1}{p}\left(\frac{a_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b_i}{v}\right)^p$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពខាងលើ រួចហើយគុណនឹង uv យើងទាញបានវិសមភាពហូលឌ័រ។

សំគាល់

បើ $p = q = 2$ វិសមភាពនេះ ក្លាយជាវិសមភាពកូស៊ី-ស្វ័សិ

256.▲ តាង $q > 0$ ដែល $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \left(p-1\right)q = p$។ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\begin{aligned} \left|x_i + y_i\right|^p &= \left|x_i + y_i\right|^{p-1} \times \left|x_i + y_i\right| \\ &\le \left|x_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1} + \left|y_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1} \end{aligned}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^p \le \sum_{i=1}^{n}\left(\left|x_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\left|y_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1}\right)$$

តាមវិសមភាពហូលឌ័រ យើងមាន

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\left(\left|x_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1}\right) &\le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^{p}\right)^{1/q} \end{aligned}$$

ដូចគ្នា

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|y_i\right|\left|x_i + y_i\right|^{p-1}\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^{p}\right)^{1/q}$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^p \le \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^{p}\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^p\right)^{1-1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i + y_i\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^p\right)^{1/p}$$

257.▲ តាង $S=\dfrac{x^{4/3}}{x^{4/3}+\left(x^2+y^2\right)^{1/3}(x+z)^{2/3}}+\dfrac{y^{4/3}}{y^{4/3}+\left(y^2+z^2\right)^{1/3}(y+x)^{2/3}}$

$$+\frac{z^{4/3}}{z^{4/3}+\left(z^2+x^2\right)^{1/3}(z+y)^{2/3}}$$

$$x=a^3, y=b^3, z=c^3$$

តាមវិសមភាព ហូលឌ័រ យើងមាន

$$\left(x^2+y^2\right)^{1/3}(x+z)^{2/3}=\left[\left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3\right]^{1/3}\left[\left(c^2\right)^{3/2}+\left(a^2\right)^{3/2}\right]^{2/3}$$

$$\geq a^2c^2+b^2a^2$$

$$=(xy)^{2/3}+(xz)^{2/3}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x^{4/3}}{x^{4/3}+\left(x^2+y^2\right)^{1/3}(x+z)^{2/3}}\leq\frac{x^{4/3}}{x^{4/3}+(xy)^{2/3}+(xz)^{2/3}}$$

$$=\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា បន្ទាប់មកបូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $S\leq 1$។

258.▲ យើងមាន $a,b,c,d\in\mathbb{R}$។ តាង $s=a+b+c+d$។ តាមវិសមភាពមិនកូវស្គី

$$S_1=\sqrt{(a+1)^2+2(b-2)^2+(c+3)^2}$$

$$+\sqrt{(b+1)^2+2(c-2)^2+(d+3)^2}$$

$$\geq\sqrt{(a+b+2)^2+2(b+c-4)^2+(c+d+6)^2}$$

$$S_2=\sqrt{(c+1)^2+2(d-2)^2+(a+3)^2}$$

$$+\sqrt{(d+1)^2+2(a-2)^2+(b+3)^2}$$

$$\geq\sqrt{(c+d+2)^2+2(d+a-4)^2+(a+b+6)^2}$$

$$S=S_1+S_2\geq\sqrt{(s+4)^2+2(s-8)^2+(s+12)^2}$$

$$=\sqrt{4s^2+288}\geq\sqrt{288}=12\sqrt{2}$$

ចំពោះ $a=b=c=d=0$ យើងមាន $S=12\sqrt{2}$។ ដូច្នេះតំលៃតូចបំផុតរបស់ S គឺ $12\sqrt{2}$។

259.▲ ក) តាង $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$ ដែល $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$។ លក្ខខណ្ឌសមមូលនឹង

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$
$$\Longrightarrow A+B+C=\pi$$

និងដោយ

$$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \sin A$$

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

អនុគមន៍ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$។ ដូច្នេះ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{A+B+C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

នាំអោយវិសមភាពពិត។

ខ) តាង $x = \tan\frac{A}{2}; y = \tan\frac{B}{2}; z = \tan\frac{C}{2}$ ដែល $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$ ។ លក្ខខណ្ឌសមមូលនឹង

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$$
$$\Longrightarrow \quad A + B + C = \pi$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$$

ពិតតាមវិសមភាពយិនសិន។

260.▲ តាង $x_n = \tan a_n$ ដែល $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ ។ យើងមាន

$$x_{n+1} = \tan a_n + \sqrt{1+\tan^2 a_n} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a_n}{2}\right)$$

យើងទាញបាន $a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6.2^{n-1}}$ ។ ដូច្នេះ $x_n = \cot\theta_n$ ដែល $\theta_n = \frac{\pi}{6.2^{n-1}}$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $y_n = \tan 2\theta_n$ ។ ដូច្នេះ $x_n y_n = \frac{2}{1-\tan^2\theta_n}$ ។ ដោយ $0 < \theta_n < \frac{\pi}{4}$ នោះយើងមាន $0 < \tan^2\theta_n < 1$ និង $x_n y_n > 2$។ ចំពោះ $n > 1$ យើងមាន $\theta_n < \frac{\pi}{6}$ ដូច្នេះ $\tan^2\theta_n < \frac{1}{3}$ និង $x_n y_n < 3$ ។

261.▲ តាង T_n ជាពហុធាChebyshev ទី n ។ យើងដឹងថា $T_n(\cos x) = \cos nx$ និង T_n កំនត់ដោយ $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), T_0(x) = 1$ និង $T_1(x) = x$ ។ ដូច្នេះមេគុណធំរបស់ T_n ស្មើនឹង 2^{n-1} ចំពោះ $n \ge 1$ ។

ប្រើរូបមន្តអាំងទែរប៉ូឡាស្យុងរបស់Lagrange ទៅលើពហុធាដឺក្រេទី $T_{n-1}(x)$ និងចំពោះចំនុច $x_1, x_2, \cdots, x_n$ យើងមាន

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

ផ្ទឹមមេគុណធំ យើងទាញបាន

$$2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

យើងយក θ_k ដែល $\cos\theta_k = x_k$ ។ ដូច្នេះ $|T_{n-1}(x_k)| = |\cos(n-1)\theta_k| \le 1$ ។ ដូច្នេះ

$$2^{n-2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|T_{n-1}(x_k)|}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k}$$

នាំអោយវិសមភាពពិត។

262.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង 4 យើងទាញបាន

$$\left| \frac{a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right| \le \frac{1}{2}$$

យើងជំនួស $\frac{a}{2} = \sin x$ និង $\frac{b}{2} = \sin y$ ។ វិសមភាពក្រោយនេះទៅជា

$$|\sin(x-y)| = |\sin x \cos y - \sin y \cos x| \le \sin\frac{\pi}{6} \qquad (*)$$

យើងចង់បាន t_1 និង t_2 ដែល $\sin t_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin t_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ។

យើងទាញបាន $\cos 2t_1 = 1 - 2\sin^2 t_1 = 1 - \frac{8-4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ និង $\cos 2t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ ។ ព្រោះ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយពី $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ទៅ $[-1;1]$ នោះ $t_1 = -\frac{\pi}{12}$ និង $t_2 = \frac{5\pi}{12}$ ។

យើងចែកចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]$ ជាចន្លោះដាច់បី ដែលនិមួយៗមានប្រវែង $\frac{\pi}{6}$ គឺ $I_1 = \left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right), I_2 = \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$ និង $I_3 = \left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right]$។ អនុគមន៍ $y = 2\sin x$ អនុវត្តចំពោះចន្លោះ I_1, I_2, I_3 មានរូបភាពមួយគត់លើចន្លោះ $I_1' = \left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}; 2\sin\frac{\pi}{12}\right), I_2' = \left[2\sin\frac{\pi}{12};\sqrt{2}\right), I_3' = \left[\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$ រៀងគ្នា។ តាមគោលការណ៍រន្ធព្រាប ចន្លោះមួយនៃ I_1', I_2', I_3' មានចំនួនពីរនៃចំនួនដែលអោយចំនួនបួន តាងដោយ a និង b។ យើងទាញបាន ចន្លោះមួយក្នុងចំនោម I_1, I_2, I_3 មានចំនួនពិត x និង y ដែល $a = 2\sin x$ និង $b = 2\sin y$ ។ ដោយចន្លោះ I_1, I_2, I_3 មានរង្វាស់ស្មើ $\frac{\pi}{6}$ ដូចគ្នា នោះ $|x-y| \le \frac{\pi}{6}$ ។ យើងទាញបាន វិសមភាព(*) ពិត។

263.▲ ចំពោះ $n = 1$ សំនើខាងលើពិត។

ចំពោះ $n = 2$ វាជានិយមន័យរបស់ភាពផត។ សន្មតថាពិតរហូតដល់ n ។

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \left(1-\lambda_{n+1}\right) y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

ដែល $y = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k$ និង $\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \le \left(1-\lambda_{n+1}\right) f\left(y\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$$

$$\leq f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)+\lambda_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)$$

264. បើគ្រប់ a_i ស្មើគ្នាទាំងអស់ នោះអនុគមន៍ M ថេរលើ $\mathbb{R}^*$។ ឥលូវនេះ យើងសន្មតថា បណ្តា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។

យើងមាន

$$\ln\left(M\left(\alpha\right)\right)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}\right)=\frac{f\left(\alpha\right)}{\alpha}$$

យើងមាន $\lim\limits_{\alpha\to 0}a_i^{\alpha}=1$ ចំពោះគ្រប់ $a_i>0$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{\alpha\to 0}f\left(\alpha\right)=0$។

ម្យ៉ាងវិញទៀត ដោយ $f'\left(\alpha\right)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln\left(a_i\right)a_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}}$ នាំអោយ

$$\lim_{\alpha\to 0}f'\left(\alpha\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln\left(a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln\left(a_i\right)$$

$$=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}\right)$$

តាមក្បួន អូពីតាល់ យើងទាញបាន $\lim\limits_{\alpha\to 0}\ln\left(M\left(\alpha\right)\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}\right)$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\alpha\to 0}M\left(\alpha\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}$$

ដូច្នេះ ដោយយក $M\left(0\right)=\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}$ យើងបន្លាយ M ដោយភាពជាប់ត្រង់ 0។

ក) ករណី $\alpha>1$

អនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^{\alpha}$ ផតដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$។ ដូច្នេះ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}>\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)^{\alpha}$។ វិសមភាពនេះដាច់ខាត ព្រោះ បណ្តា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ។

ដូច្នេះ

$$M\left(\alpha\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=M\left(1\right)$$

ខ) ករណី $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ករណីទី១: $0 < \alpha < \beta$

តាង $t = \beta / \alpha > 1$។ ចំពោះគ្រប់ $i \in \{1, \cdots, n\}$ យើងតាង $b_i = a_i^\alpha$។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^t\right)^{1/t} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^\beta\right)^{\alpha/\beta} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad M(\beta) > M(\alpha)$$

ករណីទី២: $\alpha < \beta < 0$

តាង $t = \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$។ ចំពោះគ្រប់ $i \in \{1, \cdots, n\}$ យើងតាង $b_i = a_i^\beta$។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^t\right)^{1/t} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^\alpha\right)^{\beta/\alpha} > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^\beta$$

$$\Rightarrow \quad M(\beta) > M(\alpha)$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$ ហើយជាប់ត្រង់ 0។ ដូច្នេះ វាកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$។

សំគាល់

ចំពោះ $\alpha > 0$

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$។

ដូច្នេះ

$$\ln(M(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^\alpha\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(a_1^\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(M(\alpha)) = \ln(a_1) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^\alpha\right)$$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន $0 < \dfrac{a_i}{a_1} \le 1$។ ដូច្នេះ $0 < \left(\dfrac{a_i}{a_1}\right)^\alpha \le 1$។

ហើយ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}=\lambda_1+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ ។

ដូច្នេះ $\frac{\ln(\lambda_1)}{\alpha}\le\frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right)\le 0$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to+\infty}\ln(M(\alpha))=\ln(a_1)$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to+\infty}M(\alpha)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

ចំពោះ $\alpha<0$

លើកនេះយើងសន្មតថា $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$។ ដូចខាងលើ យើងមាន

$$\ln(M(\alpha))=\ln(a_1)+\frac{1}{\alpha}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right)$$

ដែល $\frac{a_i}{a_1}\ge 1$ ចំពោះគ្រប់ i។ ដូច្នេះ $0<\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le 1$ ។

តាមវិចារដូចករណីខាងលើ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha\to-\infty}M(\alpha)=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

ដូច្នេះ

$\lim_{\alpha\to+\infty}M(\alpha)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

$\lim_{\alpha\to-\infty}M(\alpha)=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

ហើយដោយអនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $\alpha\in\mathbb{R}$ គេមាន

$$\min\{a_1,\cdots,a_n\}<M(\alpha)<\max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

265.

266.▲

$$\frac{1}{3}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]$$

$$\ge\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{(abc)^{1/3}}\right)^2 \text{ តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2 \text{ តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\geq \left(\frac{1}{3}+3\right)^2 = \frac{100}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

267.▲ តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$។ ដូច្នេះ x,y,z ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្រួចមួយ។ យើងមាន

$$\cos x+\cos y+\cos z \leq \frac{3}{2}$$

វិសមភាពនេះពិត តាមវិសមភាពយិនសិន។

យើងមានសមភាពពេល $a=b=c=\sqrt{3}$។

268.▲ យើងមាន

$$\frac{1}{6}a+\frac{2}{6}b+\frac{3}{6}c \leq \left(\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{6}b^2+\frac{3}{6}c^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+2b+3c)}{a^2+2b^2+3c^2} \leq 6$$

269.▲ តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រមានមេគុណ យើងទាញបាន

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq \left(a^p\right)^{1/p}\left(b^q\right)^{1/q} = ab$$

270.▲ អនុគមន៍ $f(x)=x^{1/3}$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $]0,+\infty[$។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\frac{a^{1/3}+b^{1/3}}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow a^{1/3}+b^{1/3} \leq \frac{2}{2^{1/3}}(a+b)^{1/3}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងនាំអោយ $a=b$។

ដូច្នេះចំនួនថេរ M តូចបំផុត គឺ $M=\dfrac{2}{2^{1/3}}=4^{1/3}$។

271.▲ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ផតលើ $]1,+\infty[$។ ដោយ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ នោះបណ្តា x_i អាចប្រើជាមេគុណក្នុងវិសមភាពយិនសិនបាន។ ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វ័ស យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-1/n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$។

272.▲ បើ $n \geq 0$ អនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$។ ដូច្នេះ

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2\left(\frac{1+a/b+1+b/a}{2}\right)^n$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right)^n$$

តែថា $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$ នោះ $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n \geq 2\times 2^n = 2^{n+1}$

បើ $n < -1$ តាង $p = -n > 1$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^p}{(a+b)^p} + \frac{a^p}{(a+b)^p} \geq \frac{1}{2^{p-1}}$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{b^p + a^p}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^p$ វិសមភាពនេះពិត តាមវិសមភាពយិនសិន ដោយពិនិត្យលើភាពប៉ោង របស់អនុគមន៍ $f(x) = x^p$ លើ $\mathbb{R}^{+*}$។ យើងឃើញថា អង្គទាំងពីរនៃវិសមភាព ស្មើគ្នា ទាល់តែ និង នាំអោយ $n \in \{0,-1\}$ និង a,b យ៉ាងម៉េចក៏បាន រឺ $n \notin \{0,-1\}$ និង $a = b$។

273.▲ យើងឃើញថាវិសមភាពខាងលើនៅដដែល បើយើងជំនួស (a,b,c) ដោយ $(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ (វិសមភាពអូម៉ូសែន)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a+b+c=1$(*)។

អនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ផត ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន និង (*) យើងទាញបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right)}}$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$a\left(a^2+\lambda bc\right)+b\left(b^2+\lambda ca\right)+c\left(c^2+\lambda ab\right)\leq \frac{1+\lambda}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\leq \frac{1+\lambda}{9}$$

យើងមាន

$$a^3+b^2+c^3=\left(a+b+c\right)^3$$

$$-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc\right)$$

តាម(*) យើងទាញបាន

$$a^3+b^3+c^3+3\lambda abc$$
$$=1-3\left(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2\right)+3\left(\lambda-2\right)abc$$
$$\leq 1-3\times 6abc+3\left(\lambda-2\right)abc \quad \text{(វិសមភាពកូស៊ី)}$$
$$=1+3\left(\lambda-8\right)abc$$
$$\leq 1+3\left(\lambda-8\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{(វិសមភាពកូស៊ី និង ដោយសារ } \lambda\geq 8\text{)}$$
$$=1+\frac{\lambda-8}{9}=\frac{1+\lambda}{9} \quad \text{ពិត}$$

សមភាពកើតមានពេលវិសមភាពកូស៊ីទៅជាសមភាព មានន័យថា $a=b=c$។

274.▲ តាង

$$f\left(a\right)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

ដោយចាត់ទុកថា b,c ជាចំនួនថេរ។ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ផតធៀបនឹង a ដូច្នេះ តំលៃធំបំផុតរបស់វា គឺនៅត្រង់ $a=0$ រឺ $a=1$។ តាមវិចារដូចគ្នា យើងទាញបានថា f មានតំលៃធំបំផុត នៅត្រង់ចំនុចមួយ (រឺច្រើនជាងមួយ) ក្នុងចំនោមត្រីធាតុ$\left(a,b,c\right)$ចំនួនប្រាំបី ដែល $a,b,c\in\left\{0,1\right\}$។ យើងពិនិត្យឃើញថា ចំពោះត្រីធាតុនិមួយៗ តំលៃរបស់អនុគមន៍ f ស្មើ 1។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

275.▲ ដោយអនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^t$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ នោះតាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t\geq n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)\right)^t \qquad (*)$$

$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t$$

តែ

ក)ដោយ $\alpha \geq 1$ នោះអនុគមន៍ $f(x) = x^{\alpha}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ខ) ដោយ $\beta > 0$ នោះអនុគមន៍ $f(x) = x^{\alpha}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}} \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{\beta} = n^{\beta}$$

តាម (*) ក) និង ខ) យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} + \frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n^{\alpha}} + n^{\beta}\right)^t$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$។ ដោយ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ នោះ

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$។

276.▲ អង្គខាងឆ្វេងជាអនុគមន៍ផត ចំពោះអថេរនិមួយៗ ដោយទប់អថេរផ្សេងទៀត។ វាមានតំលៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំនុចមួយនៃបញ្ចធាតុ(a,b,c,d,e)ទាំង 32 ដែល $a,b,c,d,e \in \{p,q\}$។

តាង n ជាចំនួនអថេរ ដែលស្មើ p ហើយដូច្នេះ $5-n$ អថេរផ្សេងទៀតស្មើ q ដែល $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកតំលៃធំបំផុតរបស់

$$f(n) = \left(np + (5-n)q\right)\left(\frac{n}{p} + \frac{5-n}{q}\right)$$

យើងមាន

$$f(n) = n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)$$

$$= n^2 + (5-n)^2 + 2n(5-n) + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

$$= 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

ដូច្នេះ $f(n)$ ធំបំផុត បើ $n(5-n)=\frac{25}{4}-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2$ មានតំលៃធំបំផុត មានន័យថា $n=2$ រឺ $n=3$។ ដូច្នេះ $f_{\max}=25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$។

277.▲ តាង $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ និង ចំពោះ $i=1,\cdots,n$ តាង $\omega_i=\frac{1}{iH_n}$។

យើងមាន $\omega_i>0$ ហើយ $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\frac{1}{H_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{1}{H_n}H_n=1$។

តាង $S=x_1+\frac{x_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^2}{n}$ ។ យើងមាន

$$\frac{S}{H_n}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i^i\ge\prod_{i=1}^{n}x_i^{i\omega_i}$$

(តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រផ្សំមេគុណ)

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/H_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_i\ge\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right)=1$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

ដូច្នេះ $\frac{S}{H_n}\ge1$ ហើយស្មើគ្នា ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$។

278.▲ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ព្រោះ $f''(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{\left(1+e^x\right)^3}\ge0$។

ចំពោះ $i=1,2,\cdots,n$ តាង $x_i=e^{y_i}$។ ដោយ $x_i\ge1$ នោះ $y_i\ge0$។

តាមវិសមភាពយិនសិន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{y_i}+1}\ge\frac{1}{e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i}+1}=\frac{1}{\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n$។

279.▲ យើងតាង $x_1=\tan\alpha_1, x_2=\sec\alpha_1\tan\alpha_2$ និង

$$x_k=\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \frac{\pi}{2}, 1 \le k \le n$ ។ យើងគួរកត់សំគាល់ថាការជំនួសនេះព្រោះលំដាប់របស់ $\tan\alpha$ គឺ $(-\infty, \infty)$ និង $\sec\alpha$ ខុសពីសូន្យជានិច្ច។ ដូច្នេះតួទីk របស់អង្គខាងឆ្វេងនៃវិសមភាពស្មើនឹង

$$\frac{\sec\alpha_1 \dots \sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k}{1+\tan^2\alpha_1+\cdots+\sec^2\alpha_1\dots\sec^2\alpha_{n-1}\tan^2\alpha_n}$$
$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_k\sin\alpha_k$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_n\sin\alpha_n < \sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow c_1s_1+c_1c_2s_2+\cdots+c_1c_2\dots c_ns_n<\sqrt{n}$$

ដែល $c_i=\cos\alpha_i$ និង $s_i=\sin\alpha_i$ ចំពោះ $1\le i\le n$ ។ ចំពោះ$2\le i\le n$ ដោយសារ $c_i^2+s_i^2=\cos^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i=1$ យើងទាញបានថា

$$c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2s_i^2+c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2c_i^2=c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2$$
$$\Longrightarrow\ s_1^2+c_1^2s_2^2+\cdots+c_1^2s_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2s_2^2\dots c_{n-1}^2=1 \quad (*)$$

តាម(*) និងតាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$c_1s_1+c_1c_2s_2+\cdots+c_1c_2\dots c_ns_n$$
$$\le\sqrt{s_1^2+c_1^2s_2^2+\cdots+c_1^2c_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2c_2^2\dots c_{n-1}^2}$$
$$\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{n-1}^2+c_n^2s_n^2}$$
$$=\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{n-1}^2+c_n^2s_n^2}$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_{n-1}+\cos^2\alpha_n\sin^2\alpha_n}$$
$$\le\sqrt{n}$$

វិសមភាពចុងក្រោយ ក្លាយជាសមភាព នៅពេលដែល

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\cdots=\cos\alpha_{n-1}=\cos\alpha_n\sin\alpha_n=1$$

សមភាពនេះមិនអាចទេ ព្រោះ $\cos\alpha_n\sin\alpha_n=\frac{1}{2}\sin 2\alpha_n<1$។ ដូច្នេះ យើងមានវិសមភាពដាច់ខាត។

280.▲ តាង $A=\sum_{i=1}^4 x_i^3$ និង $A_i=A-x_i^3 \Rightarrow A=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^4 A_i$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន $\frac{1}{3}A_1\ge\left(x_2^3x_3^3x_4^3\right)^{1/3}=x_2x_3x_4=\frac{1}{x_1}$។ តាមរបៀបដូចគ្នា

យើងទាញបាន $\frac{1}{3}A_i\ge\frac{1}{x_i}$ ចំពោះ $i=2,3,4$។

$$\Rightarrow \quad A\ge\sum_{i=1}^4\frac{1}{x_i} \qquad (១)$$

ម៉្យាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 3 និង 1 និង វិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{1}{4}A=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i^3 \qquad \ge\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right)$$

ព្រោះ $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i \geq \left(x_1x_2x_3x_4\right)^{\frac{1}{4}} = 1$

$\Rightarrow \quad A \geq \sum_{i=1}^{4} x_i \qquad$ (២)

(១) និង (២) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i},\right\}$

281.▲ បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧទាហរណ៍ $z = 0$ នោះ វិសមភាពសមមូលនឹង $8\left(x^6 + y^6 + 2x^3y^3\right) \geq 9x^3y^3$

ពិត ហើយស្មើគ្នាពេល $x = y = z = 0$។

បើ $x, y, z > 0$ យើងមាន

$$9\left(x^2 + yz\right)\left(y^2 + zx\right)\left(z^2 + xy\right)$$

$$\leq \frac{9}{8}\left(2x^2 + y^2 + z^2\right)\left(x^2 + 2y^2 + z^2\right)\left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)$$

$\leq \frac{9}{8}\left[\frac{4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{3}\right]^3$ ពិត (តាមវិសមភាពកូស៊ី)

$$= 9 \times 8\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3$$

$\leq 9 \times 8\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^2$ (តាម មធ្យមលំដាប់៣និង២)

$$= 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំអោយ $x = y = z$។

282.▲ អនុគមន៍ $f\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{1 - x}}$ ជាអនុគមន៍ផត។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n - 1}}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង $\frac{1}{2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$ ពិត។

283.▲ តាង $S=x_1+x_2+\cdots+x_n$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S-x_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left(S-x_i\right)\right] \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^5}\right)^2$$

$$=n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{5/2}\right)^2$$

$$\geq n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}\right)^{5/2}$$ (តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ $\frac{5}{2}$ និង 2)

$$=\frac{n^2}{n^{5/2}}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$។

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$0<\sum_{i=1}^{n}\left(S-x_i\right)=\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=n\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$\leq n\left(n-1\right)\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$ (តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 2)

$$\Rightarrow \quad 0<\sum_{i=1}^{n}\left(S-x_i\right) \leq \frac{n\left(n-1\right)}{\sqrt{n}}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$។

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S-x_i}\right] \geq \frac{n^2}{n^{5/2}} \times \frac{\sqrt{n}}{n\left(n-1\right)} = \frac{1}{n\left(n-1\right)}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$។

284.▲ តាង $A,B,C \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ដោយ $a = \sqrt{2}\tan A, b = \sqrt{2}\tan B$ និង $c = \sqrt{2}\tan C$។ តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C \times$$

$$\times\left(\cos A\sin B\sin C + \sin A\cos B\sin C + \sin A\sin B\cos C\right)$$

យើងមាន

$$\cos\left(A+B+C\right) = \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C$$

$$-\sin A\cos B\sin C - \sin A\sin B\cos C$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C\left(\cos A\cos B\cos C - \cos\left(A+B+C\right)\right)$$

តាង $\theta = \dfrac{A+B+C}{3}$។ តាមវិសមភាពកូស៊ី និង វិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \cos^3\theta$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{4}{9} \geq \cos^3\theta\left(\cos^3\theta - \cos 3\theta\right)$$

យើងមាន

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3\theta - \cos 3\theta = 3\cos\theta - 3\cos^3\theta$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{27} \geq \cos^4\theta\left(1-\cos^2\theta\right) \qquad (*)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.\left(1-\cos^2\theta\right)\right)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\left[\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} + \left(1-\cos^2\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ (*) ពិត។ សមភាពកើតមាន ទាល់តែនិងមានតែ

$$\tan A = \tan B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad a = b = c = 1$$

របៀបទី២

បន្ទាប់ពីពន្លាត វិសមភាពទៅជា

$$8 + (abc)^2 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \ge 9\sum_{\text{cyclic}} ab$$

តាមវិសមភាព $(ab-1)^2 + (bc-1)^2 + (ca-1)^2 \ge 0$ យើងទាញបាន

$$6 + 2\sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 \ge 4\sum_{\text{cyclic}} ab$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2 + (abc)^2 + 4\sum_{\text{cyclic}} a^2 \ge 5\sum_{\text{cyclic}} ab$$

ដោយ $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 3(ab + bc + ca)$ នោះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2 + (abc)^2 + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \ge 2\sum_{\text{cyclic}} ab$$

ពិតតាមវិសមភាពក្នុងលំហាត់ខាងលើ ករណី $t = 1$។

285.▲ ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌ $a + b = 1$ យើងបំលែងវិសមភាពដែលអោយទៅជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{(a+b)\big(a+(a+b)\big)} + \frac{b^2}{(a+b)\big(b+(a+b)\big)}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b + ab^2 \le a^3 + b^3$$

យើងមាន

$$\left(a^3 + b^3\right) - \left(a^2b + ab^2\right) = (a-b)^2(a+b) \ge 0 \text{ ។}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $a = b = \frac{1}{2}$ ។

286.▲ យើងអាចសន្មតថា $a_1 \ge a_2, b_1 \ge b_2, a_1 \ge b_1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅទេ។ បើ x រឺ y ស្មើសូន្យ នោះវិសមភាពខាងលើពិត។ ដូច្នេះ សន្មតថា x និង y មិនសូន្យទាំងពីរ។ បន្ទាប់មកទៀត វិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y ដូច្នេះ សន្មតថា $x \ge y$។

ដោយ $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ នោះ

$$a_1 - a_2 = (b_1 - a_2) + (b_2 - a_2)$$

$$\Rightarrow \quad x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1}$$

$$= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}\right)$$
$$= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}\right)$$
$$= x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-b_2} - y^{a_1-b_2}\right)\left(x^{a_1-b_1} - y^{a_1-b_1}\right)$$
$$= x^{a_2}y^{a_2}y^{a_1-b_2}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_2} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_1} - 1\right) \geq 0 \text{ ពិត}$$

287.▲ តាង $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ នោះ $a,b,c \in (0,1)$ និង $a+b+c=2$។

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

យើងបំលែងវាទៅជាអូម៉ូសែនដោយសរសេរជា

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}} + \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}} + \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\left((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត។

288.▲ ដោយវិសមភាពខាងលើ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអថេរទាំងបី យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ ដោយមិនបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅអ្វីទាំងអស់។ វិសមភាពដែលអោយ អាចសរសេរជា

$$(x-y)\left[x^r(x-z) - y^r(y-z)\right] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

ពិត ព្រោះតួនិមួយៗ សុទ្ធតែវិជ្ជមានទាំងអស់។

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និង មានតែ $x=y=z$។

289.▲ វិសមភាពខាងឆ្វេងដែលអោយមក សមមូលនឹង

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាពឈួរ ករណី $r=1$។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $a=b=c$។

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{cyclic}}\left(a^2b + ab^2\right) \geq \sum_{\text{cyclic}} 2(ab)^{3/2} \qquad \text{ពិតតាមវិសមភាពកូស៊ី។}$$

290.▲ តាង $x = a^{2/3}, y = b^{2/3}, z = c^{2/3}$ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$3-t+t\left(xyz\right)^{3/t}+\sum_{\text{cyclic}}x^3\geq 2\sum_{\text{cyclic}}\left(xy\right)^{3/2}$$

តាមសំនួរខាងលើ យើងមាន

$$\sum_{\text{cyclic}}x^3+3xyz\geq 2\sum_{\text{cyclic}}\left(xy\right)^{3/2}$$

ដូច្នេះ ពេលនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$3-t+t\left(xyz\right)^{3/t}\geq 3xyz$$

$$\Leftrightarrow\qquad \frac{3-t}{3}.1+\frac{t}{3}\left(xyz\right)^{3/t}\geq 1^{\frac{3-t}{3}}.\left[\left(xyz\right)^{3/t}\right]^{t/3}=xyz$$

ពិតតាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តធរណីមាត្រភ្ជាប់មេគុណ។ យើងឃើញថាអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c=1$។

ករណីពិសេស: ចំពោះ $t=1/2;1;2$ យើងមាន

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\left(abc\right)^4+a^2+b^2+c^2\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

$$2+\left(abc\right)^2+a^2+b^2+c^2\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

$$1+2abc+a^2+b^2+c^2\geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

291.▲ ក) ករណី $b_1\geq a_2$

ដោយ $a_1\geq a_1+a_2-b_1$ និង $a_1\geq b_1$ នោះ $a_1\geq\max\left(a_1+a_2-b_1,b_1\right)$

$$\Rightarrow\qquad \max\left(a_1,a_2\right)=a_1\geq\max\left(a_1+a_2-b_1,b_1\right)$$

យើងមាន $a_1+a_2-b_1\geq b_2\geq b_3$ និង $a_1+a_2-b_1\geq b_1+a_3-b_1=a_3$

$\Rightarrow\qquad \max\left(a_1+a_2-b_1,a_3\right)\geq\max\left(b_2,b_3\right)$។ តាមទ្រឹស្តីបទ ៥.១.១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}}z^{a_3}\left(x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\right)\\ &\geq \sum_{\text{cyclic}}z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1}+x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right)\\ &= \sum_{\text{cyclic}}x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}\right)\end{aligned}$$

$$\geq\sum_{\text{cyclic}}x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}\right)$$

$$=\sum_{\text{sym}}x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

ខ) ករណី $b_1\leq a_2$

ដោយ $3b_1\geq b_1+b_2+b_3=a_1+a_2+a_3\geq b_1+a_2+a_3$ នោះ

$$b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$

$$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$$

ដូច្នេះ

$$\max\left(a_2, a_3\right) \geq \max\left(b_1, a_2 + a_3 - b_1\right)$$

$$\max\left(a_1, a_2 + a_3 - b_1\right) \geq \max\left(b_2, b_3\right)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ៥.១.១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{a_2} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_2}\right) \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{b_1} z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1} z^{b_1}\right) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{a_1} z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1} z^{a_1}\right)\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{b_2} z^{b_3} + x^{b_3} z^{b_2}\right)$$

$$= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$$

សមភាពកើតមាន ទាល់តែ និង មានតែ $x = y = z$។

292.▲ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a + b + \left(abc\right)^{1/3}} + \frac{1}{b + c + \left(abc\right)^{1/3}} + \frac{1}{c + a + \left(abc\right)^{1/3}}$$

$$\leq \frac{1}{\left(abc\right)^{1/3}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$។ វិសមភាពទៅជា

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \quad xyz \sum_{\text{cyclic}} \left(x^3 + y^3 + xyz\right)\left(y^3 + z^3 + xyz\right)$$

$$\leq \left(x^3 + y^3 + xyz\right)\left(y^3 + z^3 + xyz\right)\left(z^3 + x^3 + xyz\right)$$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{\text{sym}} x^6 y^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^5 y^2 z^2$ ពិតតាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ។

293.▲ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}} a^3 = 6\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)$$

$$\sum_{\text{sym}} ab\sqrt{cd} = 4\left(ab\sqrt{cd} + ac\sqrt{bd} + ad\sqrt{bc} + bc\sqrt{da} + bd\sqrt{ca} + cd\sqrt{ab}\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាព សមមូលនឹង $\sum_{sym} a^3 \geq \sum_{sym} ab\sqrt{cd}$ រឺ

$$\sum_{sym}\left(a^3b^0c^0d^0\right) \geq \sum_{sym} a^1b^1c^{1/2}d^{1/2}$$

ពិត តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ ព្រោះ $(3,0,0,0)$ ម៉ាសូរ $\left(1,1,1/2,1/2\right)$។

294.▲ វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$4\sum_{sym} x^5y + 2\sum_{cyclic} x^4yz + 6x^2y^2z^2 - \sum_{sym} x^4y^2 - 6\sum_{cyclic} x^3y^3$$

$$-2\sum_{sym} x^3y^2z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{sym} x^5y - \sum_{sym} x^4y^2\right) + 3\left(\sum_{sym} x^5y - \sum_{sym} x^3y^3\right)$$

$$+2xyz\left(3xyz + \sum_{cyclic} x^3 - \sum_{sym} x^2y\right) \geq 0$$

តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ និង ឈ័រ អង្គខាងឆ្វេងជាផលបូកនៃតួមិនអវិជ្ជមាន។

295.▲ ដោយ $xy + yz + zx = 1$ យើងអូម៉ូសែនូបនីយកម្មវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sum_{sym} x^5y + \sum_{sym} x^4yz + 14\sum_{sym} x^3y^2z + 38x^2y^2z^2 \geq$$

$$\sum_{sym} x^4y^2 + 3\sum_{sym} x^3y^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{sym} x^5y - \sum_{sym} x^4y^2\right) + 3\left(\sum_{sym} x^5y - \sum_{sym} x^3y^3\right) +$$

$$xyz\left(\sum_{sym} x^3 + 14\sum_{sym} x^2y + 38xyz\right) \geq 0$$

តាមវិសមភាពមួរហ៊ែដ វិសមភាពខាងលើពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $x = y, z = 0$ រឺ $y = z, x = 0$ រឺ $z = x, y = 0$។ តែដោយ $xy + yz + zx = 1$ នោះ វាស្មើគ្នាពេល $(x,y,z) = (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$។

296.▲ <u>ដំនោះស្រាយទី១</u>

តាង $a = y + z, b = z + x, c = x + y$។

$a + b > c \quad \Leftrightarrow \quad y + z + z + x > x + y \Leftrightarrow z > 0$

ដូចគ្នា $x, y, z > 0$។

វិសមភាពខាងលើសមមូលនឹង

$$x^3z + y^3x + z^3y \ge x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \ge x + y + z$$

ដោយវិសមភាពខាងលើអូម៉ូសែន នោះយើងអាចសន្មតថា $x + y + z = 1$។ ដូច្នេះ

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \ge 1$$

ដែល $f(t) = t^2$។ ដោយ f ផតលើ $\mathbb{R}$ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \ge f\left(y.\frac{x}{y} + z.\frac{y}{z} + x.\frac{z}{x}\right) = f(1) = 1$$

ដំនោះស្រាយទី២

តាង $f(a,b,c) = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$។

យើងឃើញថា f មិនប្រែប្រួលទេ ពេលយើងធ្វើចំលាស់ស៊ីគ្លិចនៃ (a,b,c) មានន័យថា ដូរ (a,b,c) ជា (b,c,a) ជា (c,a,b)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a = \max(a,b,c)$ (តែមិនអាចសន្មតថា $a \ge b \ge c$ បានទេ ព្រោះ f មិនស៊ីមេទ្រី)។

យើងមាន

$$f(a,b,c) = a(b-c)^2(b+c-a) + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \ge 0$$

សមភាពកើតមានពេល $a = b = c$។

297.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc យើងទាញបាន

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc} + 1\right)\left(\frac{b^2}{ca} + 1\right)\left(\frac{c^2}{ab} + 1\right)}$$

តាង $x = a/b, y = b/c, z = c/a \Rightarrow xyz = 1$។ ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} \ge 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{x}{z} + 1\right)\left(\frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{y} + 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x) + xyz} \ge 1 + \sqrt[3]{\frac{(x+z)(y+x)(z+y)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x) + 1} \ge 1 + \sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$$

តាង $p = \sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$។ វិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{p^3 + 1} \ge 1 + p$$

យើងមាន

$$p \ge \sqrt[3]{2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}} = 2$$

$$\left(p^3+1\right)-\left(1+p\right)^2 = p\left(p+1\right)\left(p-2\right) \geq 0$$

298.▲ យើងមាន

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)$$
$$= \sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3b^3+\frac{1}{2}a^2b^2c^2+\frac{1}{2}a^4bc+2a^3b^2c+a^4b^2\right)$$

ហើយ

$$\left(ab+bc+ca\right)^3 = \sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3b^3+a^2b^2c^2+3a^3b^2c\right)$$

ដូច្នេះ

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\left(b^2+bc+c^2\right)\left(c^2+ca+a^2\right)-\left(ab+bc+ca\right)^3$$
$$= \sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right)$$

តែថា ស្វ៊ីត $\left(4,2,0\right)$ និង $\left(4,1,1\right)$ ម៉ាស្សូរ ស្វ៊ីត $\left(2,2,2\right)$ និង $\left(3,2,1\right)$។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពម្វូរហ៊ែដ

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^4bc+a^4b^2-\frac{1}{2}a^2b^2c^2-a^3b^2c\right) \geq 0$$

299. ▲ ក) យើងមាន

$$\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{a\left(a^2+bc\right)}$$

$$\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca} = \frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b\left(b^2+ca\right)}$$

$$\frac{1}{c}-\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}{c\left(c^2+ab\right)}$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\frac{\left(a-b\right)\left(a-c\right)}{a\left(a^2+bc\right)}+\frac{\left(b-c\right)\left(b-a\right)}{b\left(b^2+ca\right)}+\frac{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}{c\left(c^2+ab\right)} \geq 0 \qquad (*)$$

វិសមភាពខាងលើស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a \leq b \leq c$។ ដូច្នេះ

$\dfrac{\left(c-a\right)\left(c-b\right)}{c\left(c^2+ab\right)} \geq 0$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $c=a$ រឺ $c=b$។

បន្ទាប់មកទៀត

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}$$

$$=\frac{(b-a)^2(a+b)}{ab(a^2+bc)(b^2+ca)}\left[a(c-b)+cb\right]\geq 0$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b$។

ដូច្នេះវិសមភាព(*) ពិត ដោយ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c$។

ខ) តាមវិសមភាពឈ៍រ ចំពោះ $r=-1$ និង តាង $x=a+b, y=b+c$ និង $z=c+a$ យើងទាញបាន

$$0\leq\frac{1}{x}(x-y)(x-z)+\frac{1}{y}(y-z)(y-x)+\frac{1}{z}(z-x)(z-y)$$

$$=\frac{(a-c)(b-c)}{a+b}+\frac{(b-a)(c-a)}{b+c}+\frac{(c-b)(a-b)}{c+a}$$

$$=\frac{c^2+ab}{a+b}-c+\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b$$

$$\Rightarrow\quad\frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}\geq a+b+c$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x=y=z$ រឺ $a=b=c$។

300. ▲ យើងមាន

$$(xy+yz+zx)\Big[(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2$$
$$+(z+x)^2(x+y)^2\Big]$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left(x^5y+2x^4y^2+\frac{5}{2}x^4yz+\frac{3}{2}x^3y^3+13x^3y^2z+4x^2y^2z^2\right)$$

និង

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$$
$$=\sum_{\text{sym}}\left(x^4y^2+x^4yz+x^3y^3+6x^3y^2z+\frac{5}{3}x^2y^2z^2\right)$$

វិសមភាពដែលអោយសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(4x^5y+x^4yz+x^2y^2z^2-x^4y^2-3x^3y^3-2x^3y^2z\right)\geq 0 \quad (1)$$

តែស៊ីត $(5,1,0)$ ម៉ាសូរ ស៊ីត $(4,2,0)$ និង ស៊ីត $(3,3,0)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3\right) \geq 0 \tag{2}$$

ម៉្យាងវិញទៀត តាមវិសមភាពឈ័រ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xyz - x^2y\right) \geq 0$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2xyz$ វិសមភាពនេះទៅជា

$$\sum_{\text{sym}}\left(x^4yz + x^2y^2z^2 - 2x^3y^2z\right) \geq 0 \tag{3}$$

បូក(២) និង (៣) យើងទាញបាន (១)ពិត។ សមភាពកើតមានពេល $x = y = z$។

301. ▲ យើងមាន

$$\left(b+c-a\right)^2\left[\left(c+a\right)^2 + b^2\right]\left[\left(a+b\right)^2 + c^2\right] +$$
$$\left(c+a-b\right)^2\left[\left(b+c\right)^2 + a^2\right]\left[\left(a+b\right)^2 + c^2\right] +$$
$$\left(a+b-c\right)^2\left[\left(b+c\right)^2 + a^2\right]\left[\left(c+a\right)^2 + b^2\right]$$
$$= \sum_{\text{sym}}\left(\frac{3}{2}a^6 + 2a^5b + a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 + 3a^2b^2c^2\right)$$

$$\left[\left(b+c\right)^2 + a^2\right]\left[\left(c+a\right)^2 + b^2\right]\left[\left(a+b\right)^2 + c^2\right]$$
$$= \sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^6 + 2a^5b + 3a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 + 8a^3b^2c + \frac{7}{3}a^2b^2c^2\right)$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 - 12a^3b^2c + 4a^2b^2c^2\right) \geq 0$$

(1)

តែតាមវិសមភាពឈ័រ

$$\sum_{\text{sym}}\left(\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}abc - a^2b\right) \geq 0 \tag{2}$$

ដោយគុណអង្គនិមួយៗនៃ(2) នឹង $4abc$ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}}\left(4a^4bc - 8a^3b^2a + 4a^2b^2c^2\right) \geq 0 \tag{3}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 - a^4bc + 2a^3b^3 - 4a^3b^2c\right) \geq 0 \tag{4}$$

តែស៊ីត $\left(6,0,0\right)$ ម៉ាសូរ ស៊ីត$\left(4,1,1\right)$ និង ស៊ីត $\left(3,2,1\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(3a^6 - a^4bc - 2a^3b^2c\right) \geq 0 \tag{5}$$

បន្ទាប់មកទៀតស៊ីត $\left(5,1,0\right)$ ម៉ាសូរ ស៊ីត$\left(4,2,0\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(2a^5b - 2a^4b^2\right) \geq 0 \tag{6}$$

ហើយជាចុងក្រោយ ស៊ីត $\left(3,3,0\right)$ ម៉ាសូរ ស៊ីត$\left(3,2,1\right)$ ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}\left(2a^3b^3 - 2a^3b^2c\right) \geq 0 \tag{6}$$

ដោយបូក (5), (6) និង (7) យើងទាញបាន (4)។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ $a = b = c$។

VI. វិសមីការ

302. $(-3;2) \cup (4;\infty)$. **303.** $(-\infty;-2] \cup \{-1\}$. **304.**$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **305.**$(-\infty;-1] \cup [2;\infty)$. **306.**$(-5;-1)$. **307.**$(-\infty;-\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup (\sqrt{3};\infty)$. **308.**$(2-4/\sqrt{3};1) \cup (3;2+4/\sqrt{3})$. **309.**$(-\infty;\infty)$. **310.**$\left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$. **311.**$\left(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}};1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)$.▲ វិសមីការនេះសមមូលនឹង $p(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 < 0$ ។ យើងកំនត់ x ដែល $p(x) = 0$ ។ ដោយ $x = 0$ មិនមែនជាឫសនៃពហុធានេះ ដូច្នេះយើងចែក$p(x) = 0$ នឹង x យើងទាញបាន $x^2 + 1/x^2 - 4(x + 1/x) - 6 = 0$ ។ តាង $y = x + 1/x$ យើងទាញបាន $y^2 - 4y - 8 = 0$ ។ ដូច្នេះ $y_1 = 2(1+\sqrt{3})$ និង $y_1 = 2(1-\sqrt{3})$។ ដូច្នេះពហុធា$p(x)$ អាចសរសេរជា $p(x) = \left(x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 1\right)\left(x^2 - 2(1-\sqrt{3})x + 1\right)$។ ដោយ $x^2 - 2(1-\sqrt{3})x + 1 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដូច្នេះវិសមីការសមមូលនឹង $x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + 1 < 0$។ . **312.** $\left(-1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{3}-1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.● តាង $y = x - 2/x$. **313.**$(-2;0) \cup (2;\infty)$. **314.**$(-1;2)$. **315.**$(-\infty;-1) \cup (0;1/2] \cup (1;2)$. **316.**$(-1;5/8) \cup (2;7/3) \cup (3;\infty)$. **317.** $(-2;-1) \cup [0;1] \cup [2;\infty)$. **318.**$(-7;-\sqrt{37}) \cup (-5;0) \cup (5;\sqrt{37}) \cup (7;\infty)$. **319.** $(-1;0)$. **320.** $(-\infty;-2) \cup (-1;1) \cup (2;3) \cup (4;6) \cup (7;\infty)$. **321.** $(-\infty;1) \cup (3/2;5/2) \cup (7/2;4)$. **322.**$(-1/2;1)$. **323.**$[-2;1]$. **324.**$(0;1/3) \cup (0;\infty)$. **325.**$\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-1\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$. **326.**$(-\infty;-6) \cup \left(\frac{6-6\sqrt{26}}{5};-4\right) \cup (-4;0) \cup \left(6;\frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right)$. **327.**$[0;\sqrt{2}]$. **328.**$[-1-2\sqrt{2};-3) \cup (1;3]$. **329.**$\{-1\} \cup [2;\infty)$. **330.**$[0{,}5;2]$. **331.**$[-\sqrt{3};0) \cup (0;2]$. **332.**$[-0{,}5;\infty)$ ចំពោះ $a \in [1;\infty)$; $\left[-0{,}5;-0{,}5\left(1-\frac{1}{(1-a)^2}\right)\right)$ ចំពោះ $a \in (-\infty;1)$. **333.**$[1;3]$. **334.**$[-2;\infty)$ ចំពោះ $a \in [-2;\infty)$; $\emptyset$ ចំពោះ

$a \in (-\infty;-2)$. **335.** $\left(-\frac{5}{8};2{,}4\right]$. **336.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. **337.** $(3;4{,}8]$. **338.** $\left(1;2/\sqrt{3}\right]$. **339.** $\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$. **340.** $[3;12)$. **341.** $[-2;\infty)$. **342.** $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\infty\right)$. **343.** $\left(\frac{8}{3};\infty\right)$. **344.** $\left[2;\frac{2}{3}\sqrt{21}\right)$. **345.** $[3/2;2)\cup(2;26)$. **346.** $(-2;1)\cup(1;\infty)$. **347.** $[0;1/2)$. **348.** $\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **349.** $[-4;0)\cup(4;6)$.▲ លក្ខខណ្ឌរបស់វិសមីការ $24+2x-x^2\ge 0$ និង $x\neq 0$ នាំអោយយើងទាញបានចន្លោះពីរ $[-4;0)$ និង $(0;6]$។ យើងឃើញថា $x\in[-4;0)$ ជាចំលើយរបស់វិសមីការ ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង១ជានិច្ច។ ចំពោះចន្លោះទីពីរ យើងទាញបាន $\sqrt{24+2x-x^2}<x$។ .

350. $\left[-1;-\frac{3}{4}\right]$.▲ តាង $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$ ។ យើងទាញបាន $y^2-3y+2<0$។ ដូច្នេះ $1<y<2$ សមមូលនឹង

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}>1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<2\\ x\ge -1\end{cases}$$

យើងពិនិត្យវិសមីការទីមួយ។ វាសមមូលនឹង $2\sqrt{x^2+4x+3}>-3-2x$ ។ អង្គខាងស្តាំអវិជ្ជមានបើ $x\ge -1$ ។ ដូច្នេះ $x\in[-1;\infty)$ ជាចំលើយរបស់វិសមីការ។ លើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការទីពីរជាការេ សំរួលរួចហើយ យើងទាញបាន $\sqrt{x^2+4x+3}<-x$ ។ វិសមីការនេះមានចំលើយទាល់តែ $-1\le x\le 0$ (ដោយគិតលក្ខខណ្ឌវិសមីការទីមួយចូល)។ លើអង្គទាំងពីរជាការេ យើងទាញបាន $4x+3<0$។.

351.▲ យើងមាន

$$P(x)=(x-1)x(x^4(x^2+x+1)+1)+1 \qquad (1)$$

រឺ

$$P(x)=(1-x)+x^2(1-x^3)+x^8 \qquad (2)$$

តាម(១) យើងមាន $P(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty;0]\cup[1;\infty)$ ហើយតាម(២) យើងមាន $P(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0;1)$ ។ ដូច្នេះ $P(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

352.▲ អនុគមន៍ $f(x)=P(x)/Q(x)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ x លើកលែងតែចំចំនុច $x_k, k\in\mathbb{N}, k\le n$ ដែលជាចំនុចសូន្យរបស់ពហុធា $Q(x)$ ។ សន្មតថា x_0 ជាចំលើយមួយរបស់វិសមីការ $f(x)>0$ ។ ដូច្នេះ $P(x_0)$ និង $Q(x_0)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ដូច្នេះ $\phi(x_0)=P(x_0)Q(x_0)>0$ មានន័យថា x_0 ក៏ជារឺសនៃ $\phi(x)=P(x)Q(x)>0$ ។ ចំពោះ $x=x_k$ យើងមាន $\phi(x_k)=0$។ ដូច្នេះ x_k មិនមែនជារឺសនៃ $\phi(x)$ ទេ។ ដូច្នេះរឺសទាំងអស់របស់ $f(x)>0$ ក៏ជារឺសរបស់ $\phi(x)>0$ ដែរ ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាថា រឺសរបស់ $\phi(x)>0$ ក៏ជារឺសរបស់$f(x)>0$ ដែរ។ បើ$P(x)$ និង $Q(x)$ មានតំលៃមានសញ្ញាផ្សេងគ្នា ចំពោះតំលៃx ស្ថិតក្នុងដែនកំនត់របស់$f(x)$ នោះវិសមភាព $f(x)>0$ និង $\phi(x)>0$ គ្មានរឺស។ ដូច្នេះវិសមីការទាំងពីរសមមូលគ្នា។.

353. $a<0$. **354.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{45}{8}\right)\setminus\{0\}$▲អង្គខាងឆ្វេងកំនត់បើ $x\ge-\frac{1}{2}$ និង $x\neq 0$ ។ យើងមាន $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}=\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$។ ដោយអនុគមន៍ $f(x)=\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2-2x-9=$

$2\sqrt{1+2x}-7$ កើន ហើយដោយ $f(45/8)=0$ នោះ វិសមីការមានរឹស $-\frac{1}{2}\le x<45/8$ និង $x\neq 0$ ។

355. $\left[-1;1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)$.▲យើងមាន $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$ មានន័យចំពោះ $-1\le x\le 3$ ហើយជាអនុគមន៍ថយ ហើយជាប់នៅលើចន្លោះនេះ។ យើងមាន $f(-1)=2>\frac{1}{2}$ និង $f\left(1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)=\frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $-1\le x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ ។

356. ▲លក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases}2x+4\ge\\2-x\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad -2\le x\le 2$$

ដោយអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការវិជ្ជមាន នោះលើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការជាការេ យើងទាញបាន

$$9x^2+16\ge 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(2x+4)(2-x)}$$
$$9x^2+16\ge -8x+48+16\sqrt{-2x^2+8}$$
$$9x^2+8x-32-8\sqrt{-8x^2+32}\ge 0\qquad(1)$$

តាង $t=\sqrt{-8x^2+32}\ge 0; t^2=-8x^2+32$ ។ វិសមីការសមមូលនឹង

$$-t^2-8t+x^2+8x\ge 0\qquad(2)$$

យើងមាន $g(t)=-t^2-8t+x^2+8x$ មាន $\Delta=16+(x^2+8x)=(x+4)^2$ ។ ដូច្នេះ $g(t)$ មានរឹស

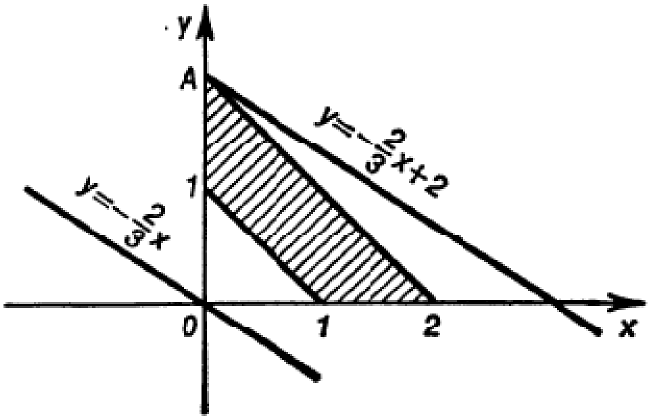
$$t_1=x; t_2=-x-8$$

វិសមីការ(២) សមមូលនឹង $\min(t_1;t_2)\le t\le\max(t_1;t_2)$ ។ យើងមាន $t_1-t_2=2x+8$ ដោយ $-2\le x\le 2$ នោះ $2x+8>0$ ។ ដូច្នេះ

$$-x-8\le t\le x\quad\Leftrightarrow t\le x$$
$$\sqrt{-8x^2+32}\le x\quad\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2\ge\dfrac{32}{9}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{4\sqrt{2}}{3}\le x\le 2$$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

357. (0; 2)▲ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធស្ថិតនៅក្នុងផ្ទៃឆ្នូត។ យើងសង់បន្ទាត់ $2x+3y=0$។ យើងចង់បានតំលៃធំបំផុតនៃ $z=2x+3y$ ។ ចំពោះតំលៃផ្សេងគ្នានៃ z យើងគូសបានបន្ទាត់ស្របនឹងបន្ទាត់ $2x+3y=0$។ នៅពេលដែល z កាន់តែធំទៅៗ បន្ទាត់ត្រូវនឹងតំលៃz ទាំងនោះឃ្លាតកាន់តែឆ្ងាយពីគល់តំរុយ។ ដូច្នេះ z ធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធជាតំលៃ z នៅពេលដែលបន្ទាត់ $z=2x+3y$ កាត់តាមA។



358. $\{(3;1)\}$. 359. $a=-1$. ចំនុចចង់បានគឺ $(0;-1)$។ 360. $\left\{\left(3;\frac{7}{2}\right);\left(-3;-\frac{7}{2}\right)\right\}$. 361.$\{1\}$.

362. ▲ សមីការទី៣ នាំអោយ $4\le x\le 7$ ។ តាង $u=y+z; v=yz$ ។ សមីការ(១)និង(២) ទៅជា

$$\begin{cases}x^3+x^2(13-u)+x(2u-2v-26)+5v-7u+30=0\\ x^3+x^2(17-u)-x(2u+2v-26)-3v+u-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(-x^2+2x-7)+v(-2x+5)+x^3+13x^2-26x+30=0 & (4)\\ u(-x^2-2x+1)+v(-2x-3)+x^3+17x^2+26x-2=0 & (5)\end{cases}$$

យកសមីការទី(៤)ដកទី(៥) យើងទាញបាន

$$u(4x-8)+8v-4x^2-52x+32=0$$

$$\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2}[u(2-x)+x^2+13x-8]$$

ជំនួសចូលសមីការទី(៤) យើងទាញបាន

$$2u(-x^2+2x-7)+(-2x+5)(u(2-x)+x^2+13x-8)+2x^3+26x^2-52x+60=0$$

$$\Rightarrow\quad u(-5x-4)+29x+5x^2+20=0$$

$$\Rightarrow\quad u(5x+4)=(5x+4)(x+5)$$

ដោយ $4\le x\le 7$ នោះ $5x+4\ne 0$ ដូច្នេះ $u=x+5$ ។ យើងទាញបាន $v=5x+1$ ។ ដូច្នេះ

$$y+z=x+5; yz=5x+1$$

ដូច្នេះ y,z ជារឹសនៃសមីការ $t^2-(x+5)t+5x+1=0$ ។ សមីការនេះមានរឹសបើឌីសគ្រីសមីណង់

$$\Delta=(x-3)(x-7)\ge 0$$

$$\Rightarrow x\le 3 \quad \text{រឺ} \quad x\ge 7$$

តែ $4\le x\le 7$ ដូច្នេះ $x=7$ ។ យើងទាញបាន $y=z=6$ ។

363. ▲ គុណវិសមីការទីមួយនឹង (-2) រួចបូកចូលវិសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$(x+3y)^2\le -\frac{4}{a+1}\qquad (1)$$

ពី(១) យើងទាញបាន $-\frac{4}{a+1}>0 \Rightarrow a<-1$ ។

យើងមាន $\frac{1-a}{a+1}+1=\frac{2}{a+1}<0 \Rightarrow \frac{1-a}{a+1}<-1$ ។ ពិនិត្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x^2+2xy-7y^2=-1 & (4)\\ 3x^2+10xy-5y^2=-2 & (5)\end{cases}$$

ដោយ $\frac{1-a}{a+1}<-1$ នោះ បើ (4)និង(៥) មានរឹស នោះប្រព័ន្ធវិសមីការក៏មានរឹសដែរ។ គុណសមីការទី៤ នឹង(-2) បូកចូលសមីការទី៥ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1 & (4) \\ (x+3y)^2 = 0 & (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y^2 = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធនេះមានរឹស។ ដូច្នេះ $a < -1$ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានរឹស។

២. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

I. គណនា

364. 9. 365. $\ln 3$. 366. $\ln|a|$. 367. $4\log_a|b|$.

368. 3. 369. 2. 370. 1 371. 2.

372. 0 ▲ $a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(a^{\sqrt{\log_a b}}\right)^{1/\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, ដូច្នេះផលសងស្មើសូន្យ។

373. $3(1-c-d)$; 374. $\frac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}$; 375. $5c-6d-4$.▲ យើងមាន $0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40} = 7/(2^2.10)$.។ ដូច្នេះ $\log 0{,}175 = \log 7 - 2\log 2 - 1$ ។ យើងមាន $\log 196 = \log 2^2.7^2 = 2\log 2 + 2\log 7 = c$; និង $\log 56 = \log 2^3.7 = 3\log 2 + \log 7 = d$ ។ យើងទាញបាន $\log 2 = \frac{2d-c}{4}$; $\log 7 = \frac{3c-2d}{4}$ ។ ដូច្នេះ $\log(0{,}175)^4 = 4(\log 7 - 2\log 2 - 1) = 5c - 6d - 4$. 376. 3 ▲ តាង $\log_2 12 = a$ យើងមាន $1/\log_{96} 2 = \log_2 2^3.12 = a+3$; $\log_2 24 = 1 + a$; $\log_2 196 = a+4$ និង $\frac{1}{\log_{12} 2} = a$ ។ កន្សោមដែលអោយសមមូលនឹង $(a+1)(a+3) - a(a+4) = 3$ ។

II. សមភាព

377. 1. ▲ យើងមាន

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}$$
$$\log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1+3\log_2 3}{3+\log_2 3}$$

តាង $\log_2 3 = x$ យើងទាញបាន

$$ab + 5(a-b) = \frac{1+2x}{2+x}\frac{1+3x}{3+x} + 5\left(\frac{1+2x}{2+x} - \frac{1+3x}{3+x}\right) = \frac{6x^2+5x+1+5(-x^2+1)}{(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{x^2+5x+6}{(x+2)(x+3)} = 1$$

III. សមីការ

378. $\{\log_{3/2} 2\,;2\log_{3/2} 2\}$. 379. $\{1-\sqrt{3};0;2;1+\sqrt{3}\}$. 380. $\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\}$.

381. $\left\{\log_{1\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6\,;0\right\}$

382. ▲ $\{-2;3\}$. តាង $3^{x^2}=u, 3^{x+6}=v$ ។ សមីការដែលអោយមានរាង $u^2-2uv+v^2=0$ ឬ $(u-v)^2=0$ ។ ដូច្នេះ $3^{x^2}=3^{x+6}$ ។ ...។

383. ▲ $\{-2;3\}$. តាង $2^{\sqrt{2x+1}}=y, 2^x=z$ យើងទទួលបាន $x^2y+z=2y+x^2z/4$ ឬ $\left(\frac{x^2}{4}-1\right)(2y-z)=0$ ។ យើងទាញបាន $x_1=2$ ឬ $2y=z$ នាំអោយ $x_4=4$ ។

384. $\{11\}$.▲ យើងបំលែងអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ$4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=4^{\log_4 3(x-3)}\left(2^{\log_2 5}\right)^2=5^2\left(4^{\log_4(x-3)}\right)^{1/3}=25(x-3)^{1/3}$។ យើងមាន $25(x-3)^{1/3}=50, x-3=2^3, x=11$ ។

385. $\{4\}$. 386. $\{-3;\ -1\}$. 387. $\{27\}$; 388. $\{-1\}$ ▲ យើងបង្រួមសមីការទៅជារាង $\log_2(3-x)(1-x)=\log_2 2^3$ នាំអោយ $x^2-4x-5=0$ នាំអោយ $x=-1$ ។

389. $\{4\}$; 390. $\{8\}$; 391. $\{2\}$; 392. $\{3\}$; 393. $\{3;3+\sqrt{2}\}$; 394. $\{-11;\ -6-\sqrt{7};-6+\sqrt{7};\ -1\}$;

395. $\{3\}$; 396. $\{-17\}$; 397. $\{1\}$; 398. $\{2\}$; 399. $\{\sqrt{2};\sqrt{6}\}$.

400. $\{-2^{1/\log_a 4a^4};\ 2^{1/\log_a 4a^4}\}$ ចំពោះ $a\in\left(0;\ 1/\sqrt{2}\right)\cup\left(1/\sqrt{2};1\right)\cup(1;\infty)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានរឹស។

401. $\left\{\frac{3a+3}{7-a}\right\}$ ចំពោះ $a\in(3;\ 7)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានរឹស។

402. $\left\{\frac{2a-1}{6}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;\ -12)\cup(1/2\,;\infty)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានរឹស។

403. $\{1;60\}$. ចំពោះ $x=1$ អង្គទាំងពីរនៃសមីការស្មើសូន្យ ដូច្នេះ $x=1$ ជារឹសមួយនៃសមីការនេះ។ ឥលូវនេះយើងរករឹសផ្សេងទៀតដែលផ្សេងពីមួយ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\frac{1}{\log_3 x\log_4 x\log_5 x}$ យើងទាញបាន

$$1=\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}=\log_x 3+\log_x 4+\log_x 5$$
$$\Longrightarrow\ \log_x 3.4.5=1;\ \Longrightarrow\ x=60$$

404. $\{1;\sqrt{3}/8\}$. 405. $\left\{\frac{1}{10};\sqrt{10}\right\}$. 406. $\left\{\frac{1}{2};4\right\}$. 407. $\{3;3^9\}$. 408. $\{1/625;5\}$.409. $\{\sqrt[5]{5};5\}$.

410. $\{10\}$.

411. $\{-1/4\}$. 412. $\left\{0;\frac{7}{4};\frac{3+\sqrt{24}}{2}\right\}$. 413. $\{2\}$. 414. $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}};8\right\}$. 415. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};1;4\right\}$. 416. $\left\{\frac{1}{8};1;4\right\}$. 417. $\left\{\frac{1}{9};1;3\right\}$.

418. $\{5\}$. 419. $\{a-1;a+1\}$ ចំពោះ $a\in\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)\cup(2;\infty)$; $\{3\}$ ចំពោះ $a=2$ ។

420. $\{a^2\}$ ចំពោះ $a\in\left(0;1/\sqrt{2}\right)\cup\left(1/\sqrt{2};1\right)\cup(1;\infty)$ ។

421. $\{25\}$ 422. $\{1/9\}$ 423. $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$ 424. $\{2\}$ 425. $\{3\}$

426. $\{1/3\}$ 427. $\{3;10\}$ 428. $\{2;4\}$ 429. $\left\{\log_2\frac{3}{5};\log_2\frac{2}{5}\right\}$

430. $\{2\}$ 431. $\{2\}$ 432. $\{0\}$ 433. $\{-1;2\}$

434. $\{2\}$ 435. $\{-\log_2 3\}$ 436. $\left\{-\frac{9}{10};99\right\}$ 437. $\left\{-\frac{1}{10^5};10^3\right\}$

438. $\{1000\}$ 439. $\{0\}$ 440. $\left\{\frac{1}{10};2;1000\right\}$ 441. $\{0,2;6\}$

442. {2}. ● តាង $2^{\log_{x^2}(3x-2)} = u, 3^{\log_{x^2}(3x-2)} = v$ រួចហើយដោះស្រាយសមីការ $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$ ជាអនុគមន៍នៃ u រឺ v ។

443. $\left[\frac{1}{5};\infty\right)$ 444. $\{1/16\} \cup [4;\infty)$.▲ តាង $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y$ សមីការដែលអោយទៅជា $\log_2\sqrt{y+6} = \log_2\sqrt{2}|y|$ រឺ $2y^2 - y - 6 = 0$ ដែលមានរឺស $y_1 = 2$ និង $y_2 = -3/2$ ។ ដូច្នេះ $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = |\sqrt{x} - 2| \Rightarrow x \geq 4$ ។ ជំនួស $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1/16$ ។

445. {2}.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 13^x យើងទាញបាន

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$$

យើងមាន $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ ។ អនុគមន៍ $y_1 = \left(\frac{5}{13}\right)^x$ និង $y_2 = \left(\frac{12}{13}\right)^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ។ ដូច្នេះ

- បើ $x < 2$ នោះ $\left(\frac{5}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2$; $\left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{12}{13}\right)^2$

  $\Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$
- បើ $x > 2$ នោះ $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

ដូច្នេះសមីការមានរឺសតែមួយគត់គឺ $x = 2$ ។

446. {3} 447. {0} 448. {3} 449. {15} ហើយ $a = 3$។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

450. $\{(|a|^{66/5}; |a|^{72/5})\}$ ចំពោះ $a \neq \{-1; 0; 1\}$ ។ 451. {(1/2; 1/2)} 452. {(9/2; 1/2)}

453. {(8; 1)} 454. {(3/2; 1/2)} 455. $\{(\sqrt[4]{3}; -1); (\sqrt[4]{3}; 1)\}$ 456. {(4; −1/2)}

457. {(0,1; 2); (100; −1)} 458. {(2; 10); (10; 2)}

459. {(2; 1/6)} 460. $\{(9a/2; a/2); (a/2; 9a/2)\}$ ចំពោះ $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ ។

461. {(2; 4); (4; 2)} 462. $\{(a^2; a); (a; a^2)\}$ ចំពោះ $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$; $\{((a+1)^2; -(a+1)); (-(a+1); (a+1)^2)\}$ ចំពោះ $a \in (-\infty;-2) \cup (-2;-1)$ ។

463. {(3; 9); (9; 3)} 464. {(3; 2)} 465. {(−2; −2); (2; 2)} 466. {(12; 4)}

467. {(5; 1/2)} 468. {(64; 1/4)} 469. {(−2; 4)}

V. វិសមភាព

470. ▲ យើងមាន $2^{300} = 8^{100} < 3^{200} = 9^{100}$ ។

471.▲ យើងមាន $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$។ ចំពោះ $n > 1$ យើងមាន

$$\log_n\frac{n+1}{n} > \log_{n+1}\frac{n+1}{n} > \log_{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \log_n(n+1) - \log_n n > \log_{n+1}(n+2) - \log_{n+1}(n+1)$$

យើងទាញបាន $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+1)$ ។

472.▲ ដោយ $27 > 25$ នោះ $\log_8 27 = \log_4 9 > \log_9 25$។

473.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា ស្វ៊ីត $\left(x_i\right)$ ជាស្វ៊ីតកើន។ ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $\left(\ln x_i\right)$ ក៏ជាស្វ៊ីតកើនដែរ។ តាមវិសមភាពឆេបីសិវ យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

474.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\left(x^2+2yz\right)\ln x + \left(y^2+2zx\right)\ln y + \left(z^2+2xy\right)\ln z$$
$$\geq \left(xy+yz+zx\right)\left(\ln x + \ln y + \ln z\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x + \left(y-z\right)\left(y-x\right)\ln y$$
$$+\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z \geq 0$$

យើងមាន $\ln x, \ln y, \ln z > 0$ ព្រោះ $x, y, z > 1$។

វិសមភាពខាងលើមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី (ជំនួស x ដោយ y រឺ ដោយ z គ្មានអ្វីប្រែប្រួល)។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$។ ដូច្នេះ

$\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z \geq 0$

បន្ទាប់មកទៀត អនុគមន៍ $\ln$ ជាអនុគមន៍កើន លើ $\mathbb{R}^{+*}$ យើងទាញបាន

$$\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x \geq \left(y-z\right)\left(x-y\right)\ln y$$

ព្រោះ កត្តានិមួយៗ សុទ្ធតែ វិជ្ជមានរឺសូន្យ ហើយកត្តានិមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេង ធំជាងកត្តានិមួយៗនៃអង្គខាងស្ដាំ។

VI. វិសមីការ

475. $(-\infty;\ -2{,}5) \cup (0;\infty)$
476. $\left(-1-\sqrt{2};\ -2\right) \cup \left(0;\sqrt{2}-1\right)$
477. $\left(-\infty;\ 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2};\infty\right)$
478. $(-\infty;\ -2) \cup (5/8;\infty)$
479. $\left[-7;-\sqrt{35}\right) \cup \left[5;\sqrt{35}\right)$
480. $(2;7)$
481. $\left(-\sqrt{5};-2\right) \cup \left(1;\sqrt{5}\right)$
482. $(-1;1) \cup (3;\infty)$
483. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
484. $\left(-1;1+2\sqrt{2}\right)$
485. $(2;7) \cup (22;27)$
486. $(2;4)$
487. $(1;11/10)$
488. $[-1;4)$
489. $\left(-4;-1-\sqrt{3}\right] \cup \left(0;\sqrt{3}-1\right]$
490. $(3;5]$
491. $(2;5)$

492. $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$

493. $(0; 10^{-4}] \cup [10; \infty)$

494. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; \infty)$

495. $(0; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 9\right)$

496. $(1/16; 1/8) \cup (8; 16)$

497. $\left(0; 1/\sqrt{27}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \sqrt{243}\right] \cup [27; \infty)$

498. $(1/16; 1/4) \cup (1/2; 2)$

499. $(0; 1/2) \cup (32; \infty)$

500. $\left[\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right]$

501. $(-1; \infty)$

502. $\left(\log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

503. $\left(-\infty; 1 - \log_3 \sqrt[3]{5}\right]$

504. $(-\infty; 0) \cup (\log_2 3; \infty)$

505. $(0{,}01; \infty)$

506. $(-\infty; -1) \cup (-0{,}1; 0)$

507. $\left(\log_2(5 + \sqrt{33}) - 1; \infty\right)$

508. $(-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$

509. $\left(\log_5(\sqrt{2} + 1); \log_5 3\right)$

510. $(-\infty; 0] \cup (0; \infty)$

511. $[2; \infty)$

512. $[28/3; \infty)$

513. $\left[\log_3 \frac{83}{19}; \infty\right)$

514. $\left(-3; -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}; 3\right)$

515. $(-1/2; 2)$

516. $[-3; 1)$

517. $\left(-4; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

518. $(0; 2) \cup (4; \infty)$

519. $(1000; \infty)$

520. $\left(0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; \infty)$

521. $\left(\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}; \infty\right)$ ចំពោះ $a \in (1; \infty)$; $\left(1; \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right)$ ចំពោះ $a \in (0; 1)$

522. $(0; a^5) \cup (a^3; a^2) \cup (\frac{1}{a}; \infty)$

523. $(1/a; a^4)$ ចំពោះ $a \in (1; \infty)$; $(a^4; 1/a)$ ចំពោះ $a \in (0; 1)$

524. $\left[\log_a\left(4 + \sqrt{16 + a^2}\right); 3\log_a 2\right)$ ចំពោះ $a \in (0; 1)$; $\left[\log_a\left(4 + \sqrt{16 + a^2}\right); \infty\right)$ ចំពោះ $a \in (1; \infty)$

525. $(3; 4) \cup (5; \infty)$

526. $(1; 2)$

527. $(0; 1/2) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$

528. $(-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; 3)$

529. $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{23}{22}\right)$

530. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right) \cup [-1; 3]$

531. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$

532. $(-3; -1)$

533. $\left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right) \cup (1; \infty)$

534. $[-1; 1/2) \cup [1; 2) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right)$

535. $\left(3; 5 - \sqrt{3}\right) \cup (7; \infty)$

536. $(1; 2)$

537. $(0; 3) \cup (4; 6) \cup (6; 12) \cup (14; \infty)$

538. $(0; 4)$

539. $[2; 4)$

540. $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$

541. $(1; 2)$

542. $(0; 2)$

543. $\left(1/\sqrt{5}; 1\right) \cup (3; \infty)$

544. $(-1; \infty)$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

545. $\{8\}$ **546.** $\{4\}$ **547.** $(0; 1/a^4)$ ចំពោះ $a \in (1; \infty), (0; a^8)$ ចំពោះ $a \in (0; 1)$ ។

៣. ត្រីកោណមាត្រ

I. គណនា

548. ក) $\sqrt{2-a^2}$;

ខ) $1-\frac{(a^2-1)^2}{2}$ ● $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2$; $a^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$.

549. ក) p^2-2; ខ) p^3-3p

550. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; 551. $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$ ▲ តាង $40°+\alpha=\beta$ ។ $\cos(70°+\alpha)=\cos(30°+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta$ ។ ដោយ $0<\alpha<45°$ នោះ $\cos\beta>0$ ដូច្នេះ $\cos\beta=\sqrt{1-b^2}$ ។

552. $1073/1105$; 553. $\sin 3\alpha=-\frac{117}{125}, \cos 3\alpha=\frac{44}{125}, \tan 3\alpha=-117/44$.

554. $\tan 2\alpha$; 555. $-\tan\alpha$; 556. $\tan 2\alpha$; 557. $\operatorname{cosec}\alpha$

558. $-1/2$. ▲

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

559. 1. ● បំលែងជា $\frac{\sin\frac{13}{14}\pi-\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}$

560. $1/3$ ▲ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}+\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=1{,}4$ ។ ដូច្នេះ $2{,}4\tan^2(\alpha/2)-2\tan(\alpha/2)+0{,}4=0 \implies \tan\alpha/2=1/3 ; \tan\alpha/2=1/2$ ។ យើងមាន $0<\alpha/2<\pi/8 ; \tan\pi/8=\sqrt{2}-1<1/2$ ។

561. π ▲ តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}, 0<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}, \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}<1$ ។ ដូច្នេះ

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\implies \tan\frac{\beta+\gamma}{2}-\cot\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\implies -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

562. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ● $\cos 292°30' = \sin 22°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$;

563. 4 ▲ $\operatorname{cosec} 10° - \sqrt{3}\sec 10° = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10° \cos 10°} = \frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°} = 4$

564. $\sqrt{3}$ ▲

$$\frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \frac{\cos 40° - 2\sin 30° \sin 10°}{\sin 20°} = \frac{\sin 50° - \sin 10°}{\sin 20°} = \frac{2\cos 30° \sin 20°}{\sin 20°}$$
$$= \sqrt{3}$$

565. 4 ▲ យើងមាន

$$-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35° - \frac{\sec 5°}{2} - \frac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(2\sin 35° \sin 10° - \frac{\frac{1}{2}\sin 10°}{\cos 5°} - \frac{\cos 40° \sin 10°}{\sin 5°}\right)$$
$$= -2\sqrt{2}(2\sin 35° \sin 10° - \sin 5° - 2\cos 40° \cos 5°)$$
$$= -2\sqrt{2}(-2\cos 45° - \sin 5° + \cos 25° - \cos 35°)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(-\sqrt{2} - \sin 5° + 2\sin 30° \times \sin 5°\right) = 4$$

566. 3/4 ▲ យើងមាន

$$\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73° \cos 47°$$
$$= \frac{1+\cos 146°}{2} + \frac{1+\cos 94°}{2} + \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 26°)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \cos 146° + \cos 94° + \cos 26°\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos(180° - 146°) + 2\cos\frac{120°}{2}\cos\frac{68°}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos 34° + \cos 34°\right) = \frac{3}{4}$$

567. $-\frac{1}{2}$ ▲ យើងមាន

$$(\sin 6° - \sin 66°) + (\sin 78° - \sin 42°) = 2\cos 60° \sin 18° - 2\sin 30° \cos 36°$$
$$= \sin 18° - \sin 54° = -\frac{2\cos 36° \sin 18°}{\cos 18°}\cos 18° = -\frac{2\cos 36° \sin 36°}{2\cos 18°}$$
$$= -\frac{\sin 72°}{2\cos 18°} = -\frac{1}{2}$$

568. $-1/\sqrt{2}$;   569. 1 ; 570. 0 ● $\tan^2 20° = \frac{1-\cos 40°}{1+\cos 40°}$

571. 1/5 ▲ យើងមាន

$$\cot^2 36° \cot^2 72° - 1 + 1 = 1 + \frac{\cos 108° \cos 36°}{\sin^2 36° \sin^2 72°} = 1 - (\cot 36° \cot 72°)^2 \frac{1}{\cos 36° \cos 72°}$$
$$= 1 - \cot^2 36° \cot^2 72° \frac{2.2\sin 36°}{\sin 144°}$$
$$= 1 - 4\cot^2 36° . \cot^2 72°; \Longrightarrow 5\cot^2 36° \cot^2 72° = 1 \Longrightarrow \cot^2 36° \cot^2 72°$$
$$= \frac{1}{5}$$

572. 433▲យើងមាន

$$\tan^2\left(3\frac{\pi}{18}\right)=\tan^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\tan^2\left(3\frac{5\pi}{18}\right)=\tan^2\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\tan^2\left(3\frac{7\pi}{18}\right)=\tan^2\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ $x_1=\frac{\pi}{18};x_2=\frac{5\pi}{18};x_3=\frac{7\pi}{18}$ ជាឫសបីនៃសមីការ $\tan^2 3x=\frac{1}{3}$ ។ សមីការនេះសមមូលនឹង

$$\left(\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\right)^2=\frac{1}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\tan^6 x-6\tan^4 x+9\tan^2 x}{9\tan^4 x-6\tan^2 x+1}=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\quad 3\tan^6 x-25\tan^4 x+33\tan^2 x-1=0$$

តាង $t=\tan^2 x\geq 0$ នោះ $t_1=\tan^2\frac{\pi}{18};\ t_2=\tan^2\frac{5\pi}{18};\ t_3=\tan^2\frac{7\pi}{18}$ ជាចំលើយនៃសមីការ $3t^3-27t^2+33t-1=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងទាញបាន

$$t_1+t_2+t_3=\frac{27}{3}=9;$$
$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{33}{3}=11$$
$$t_1t_2t_3=\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}A&=t_1^3+t_2^3+t_3^3\\&=(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+3t_1t_2t_3\\&=9^3-3.9.11+3.\frac{1}{3}=433\end{aligned}$$

573. ▲យើងមាន

$$\begin{cases}\sin 1999x=0\\0<x<\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{1999};k=1,2,\dots,1998\quad(1)$$

$$\begin{aligned}&2\sin x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)\\&=\sin x+\sin(-x)+\sin 3x+\sin(-3x)+\sin 5x+\cdots+\sin(-1997x)+\sin 1999x\\&=\sin 1999x\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\ \frac{\sin 1999x}{\sin x}=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right),\forall x\in(0,\pi)\quad(2)$$

យើងដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m យើងមាន $\cos mx$ ជាពហុធាដឺក្រេទីm នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេទីm ស្មើ 2^{m-1} (ពហុធា Tchebyshev)។ ដូច្នេះ $2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 1998 នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេ 1998 ស្មើ $2.2^{1998-1}=2^{1998}$ ។

(3)

ពី(១)(២)និង(៣) យើងទាញបាន

$$\frac{\sin 1999x}{\sin x}=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)$$

$$= 2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{1999}\right)$$

តែយើងមាន $\cos\frac{1998\pi}{1999}=-\cos\frac{\pi}{1999};\cos\frac{1997\pi}{1999}=-\cos\frac{2\pi}{1999};\ldots;\ \cos\frac{1000\pi}{1999}=-\cos\frac{999\pi}{1999}$; នោះ

$$\frac{\sin 1999x}{\sin x}=2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{1999}\right)$$

$$=2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\cos^2 x-\cos^2\frac{k\pi}{1999}\right)\quad(4)$$

ក្នុង(៤) យើងយក $x=\pi/3$ យើងទាញបាន

$$\frac{\sin\frac{1999\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1}{4}-\cos^2\frac{k\pi}{1999}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+666\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1-4\cos^2\frac{k\pi}{1999}}{2^2}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{999}\left(1-4\cos^2\frac{k\pi}{1999}\right)=1$$

ដូច្នេះ $P=1$ ។

II. សមភាព

574. 575.

576. ● $\alpha+\beta+\gamma=\pi\Longrightarrow\ \alpha+\beta=\pi-\gamma$ ។

577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595.

596. ▲ យើងមាន

$$16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=8\cos 80°\cos 40°\cos 20°$$
$$=4\cos 80°\cos 40°\frac{2\sin 20°\cos 20°}{\sin 20°}=2\cos 80°\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\sin 20°}$$
$$=\frac{2\cos 80°\sin 80°}{\sin 20°}=\frac{\sin 160°}{\sin 20°}=\frac{\sin(180°-160°)}{\sin 20°}=1$$

597. ● ប្រើរូបមន្ត $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha\,,2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$

598.599.

600. ● ប្រើរូបមន្ត $1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

601. ▲តាង $R_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}$ ។ យើងមាន

$$R_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$R_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}} = \sqrt{2.2\cos\frac{\pi}{2^3}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

សន្មតថា $R_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។ យើងមាន

$$R_{n+1} = \sqrt{2+R_n} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

602. ▲ យើងមាន

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = \cos\left(2x+x\right) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x$$

$$= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos\left(n+1\right)x = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x$$

$$\cos nx = \cos\left(n-1\right)x\cos x + \sin\left(n-1\right)x\sin x$$

$$\Rightarrow \sin\left(n-1\right)x\sin x = \cos nx - \cos\left(n-1\right)x\cos x$$

$$\sin nx = \sin\left(n-1\right)x\cos x - \sin x\cos\left(n-1\right)x$$

$$\Rightarrow \sin nx\sin x = \sin\left(n-1\right)x\sin x\cos x - \sin^2 x\cos\left(n-1\right)x$$

$$= \left[\cos nx - \cos\left(n-1\right)x\right]\cos x - \left(1-\cos^2 x\right)\cos\left(n-1\right)x$$

$$= \cos nx\cos x - \cos\left(n-1\right)x\cos x$$

$$- \cos\left(n-1\right)x + \cos^2 x\cos\left(n-1\right)x$$

$$\Rightarrow \cos\left(n+1\right)x = \left[\cos x + 1 - \cos^2 x\right]\cos\left(n-1\right)x$$

$$= \left(1+\cos x - \cos^2 x\right)T_{n-1}\left(\cos x\right)$$

$$= T_{n+1}\left(\cos x\right)$$

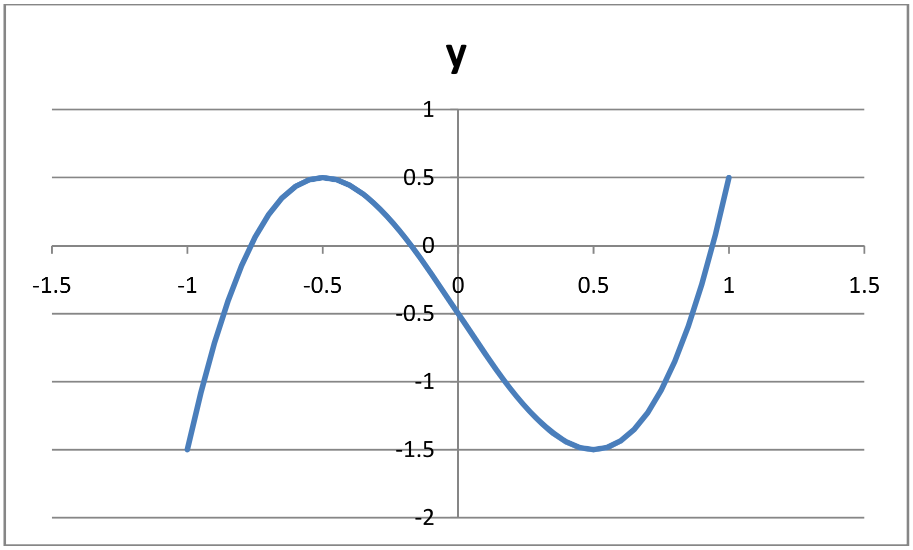
603. ▲ យើងមាន

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + 3 \quad (1)$$

តាង $2t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0$ ។ សមីការ(1) សមមូលនឹង

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \quad \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

អនុគមន៍ $f(t) = 4t^3 - 3t - \frac{1}{2}$ មាន ខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចបីស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(-1;1)$ ។ មានន័យថាសមីការ(២)មានចំលើយ $t \in (-1;1)$ ។ តាង $t = \cos\alpha$ ដែល$\alpha \in (0;\pi)$ ។



យើងទាញបាន

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ដោយ $\alpha \in (0;\pi)$ នោះ $\alpha = \left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$ ។ ដូច្នេះសមីការមានរឹសបីគឺ $t_1 = \cos\frac{\pi}{9};\ t_2 = \cos\frac{5\pi}{9}; t_3 = \cos\frac{7\pi}{9}$ ។ យើងមាន $t_2; t_3 < 0$ ។ ដូច្នេះមានតែ $t_1 = \cos\frac{\pi}{9}$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $t > 0$ ។មានន័យថា$\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 2t = 2\cos\frac{\pi}{9}$ ។

604. ▲យើងមាន

$$\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{7} + 1 - \cos\frac{4\pi}{7} + 1 - \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

តាង $A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ នោះ

$$2\sin\frac{\pi}{7}.A = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A = \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A = -\sin\frac{\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

III. សមីការ

605. $\{\pi n; 2\pi n \pm 3\pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

606. $\{2\pi n \pm \pi/6\,; 2\pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

607. $\{\pi n/2 + (-1)^n\,\pi/12\ | n \in \mathbb{Z}\}$

608. $\left\{\frac{\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

609. $\{\pi n + \pi/4; 2\pi n \pm \pi/3 \,|n \in \mathbb{Z}\}$

610. $\{\pi n + (-1)^{n+1}\pi/6 \,|n \in \mathbb{Z}\}$

611. $\{2\pi n \pm \pi/3 \,|n \in \mathbb{Z}\}$

612. $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

613. $\{2\pi n \pm 2\pi/3 \,|n \in \mathbb{Z}\}$

614. $\{\pi(5n+2) + \pi/2\,; 5\pi n|\, n \in \mathbb{Z}\}$

615. $\{\pi n; 2\pi n + \pi/6|\, n \in \mathbb{Z}\}$

616. $\{\pi n + \pi/4; \pi n + \arctan 3|\, n \in \mathbb{Z}\}$

617. $\{\pi n - \arctan(1/2)\,; \pi n + \arctan 2|\, n \in \mathbb{Z}\}$

618. $\{\pi n + \pi/6; \pi n + \pi/3|\, n \in \mathbb{Z}\}$

619. $\{\pi n + 3\pi/4; \pi n + \operatorname{arccot} 2|\, n \in \mathbb{Z}\}$

620. $\{\pi n + (-1)^{n+1}\pi/4; \pi n + \operatorname{arccot} 2|\, n \in \mathbb{Z}\}$

621. $\{\pi n + (-1)^n\pi/4|\, n \in \mathbb{Z}\}$

622. $\{2\pi n + \arctan(1/2)|\, n \in \mathbb{Z}\}$

623. $\{\pi n/2 + \pi/8|\, n \in \mathbb{Z}\}$

624. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin 2(2-\sqrt{3})\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

625. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin(1-\sqrt{3+2a})\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

626. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\frac{\pi}{12}\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

627. $\left\{\frac{\pi n}{5}; \frac{2\pi n}{5} \pm \frac{1}{5}\arccos\frac{1}{4}\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

628. $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{33}-3}{4}\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

629. $\{\pi n/5 + (-1)^n\pi/20 - 6/5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

630. $\{\pi n/2 + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

631. $\{\pi(2n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

632. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; 2\pi n \pm (\pi - \arccos(2/3))\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

633. $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n \pm \pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

634. $\left\{2\pi n; 2\pi n \pm 2\pi/3\,; 2\pi n \pm \arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

635. $\{\pi n + \arctan 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

636. $\{\pi n + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

637. $\{\pi n - \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

638. $\{2\pi n - \pi/4\,;\ 2\pi n + \pi/2|\, n \in \mathbb{Z}\}$

639. $\{\pi n + \pi/2\,;\ \pi n + \arctan(1/4)|\, n \in \mathbb{Z}\}$

640. $\{\pi n+\pi/4\,;\ 2\pi n \pm 2\pi/3|\ n \in \mathbb{Z}\}$

641. $\{\pi n+\arctan 2|\ n \in \mathbb{Z}\}$

642. $\{2\pi n; \pi n+\pi/4|\ n \in \mathbb{Z}\}$

643. $\{\pi n-\pi/4; \pi n|\ n \in \mathbb{Z}\}$

644. $\{\pi n+\pi/4|\ n \in \mathbb{Z}\}$

645. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}; \pi n-\arctan 2\right|\ n \in \mathbb{Z}\Big\}$

646. $\{\pi n+\pi/4\,; \pi n-\arctan(1/4)|\ n \in \mathbb{Z}\}$

647. $\left\{\pi n+\frac{\pi}{4}; \pi n+\arctan(3/5)\right|\ n \in \mathbb{Z}\Big\}$

648. $\{\pi n+\arctan 2\,; \pi n-\arctan(3/4)|\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● សរសេរអង្គខាងស្តាំជា $-2(\sin^2 x+\cos^2 x)$ រួចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2 x$ ។

649. $\left\{\pi n-\frac{\pi}{4}; \pi n+\arctan 5\right|\ n \in \mathbb{Z}\Big\}$

650. $\{\pi n-\arctan \sqrt[3]{4}|\ n \in \mathbb{Z}\}$

651. $\{\pi n-\pi/4\,; \pi n \pm \pi/3|\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្តាំនៃសមីការជា $3\sin x\,(\cos x-\sin x)+3=3\sin x\cos x-3\sin^2 x+3(\sin^2 x+\cos^2 x)=3\cos x\,(\sin x+\cos x)=3\cos^2 x\,(\tan x+1)$

652. $\{\pi n/2|\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្តាំនៃសមីការជា $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$

653. $\{2\pi n; 2\pi n+\pi/3|\ n \in \mathbb{Z}\}$

654. $\{2\pi n+\pi/12\,; 2\pi n+7\pi/12|\ n \in \mathbb{Z}\}$

655. $\{2\pi n/5-\pi/5\,; 2\pi n/5+2\pi/15|\ n \in \mathbb{Z}\}$

656. $\{2\pi n; 2\pi n+\pi/2|\ n \in \mathbb{Z}\}$

657. $\{2\pi n+5\pi/3|\ n \in \mathbb{Z}\}$

658. $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}(2n+1); \frac{\pi}{8}(1-2n)\right|\ n \in \mathbb{N}\Big\}$

659. $\left\{\pi n+\frac{7\pi}{12}\right|\ n \in \mathbb{Z}\Big\}$

660. $\{\pi n/4|\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{4k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$

661. $\left\{\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{12}\right|n \in \mathbb{Z} \setminus \{1+3m|m \in \mathbb{Z}\}\Big\}$

662. $\{\emptyset\}$

663. $\{\pi n|n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ បំលែងសមីការជា $2(\tan 3x-\tan 2x)=\tan 2x\,(1+\tan 3x\tan 2x)$ (១)។ បើ $1+\tan 3x\tan 2x=0$ នោះ

$$\frac{\sin 3x\sin 2x+\cos 3x\cos 2x}{\cos 2x\cos 3x}=0 \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos 2x\cos 3x}=0 \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x\,(4\cos^2 x-3)}=0$$

មិនមានរឹស។ ដូច្នេះយើងអាចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(១) នឹង $1+\tan 3x\tan 2x$បាន។ សមីការ(១)ទៅជា

$$2\frac{\tan 3x-\tan 2x}{1+\tan 3x\tan 2x}=\tan 2x$$
$$2\tan x=\tan 2x$$
$$2\tan x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
$$\tan x=0$$

664. $\{90°n+25°|n\in\mathbb{Z}\}$

665. $\{2\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$

666. $\{2\pi n-\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

667. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{6};\pi n+\pi/2\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$

668. $\{2\pi n\pm 2\arctan 5|n\in\mathbb{Z}\}$

669. $\left\{2\pi n\pm 2\arctan 3;\ 2\pi n\pm 2\arctan\sqrt{3/11}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$

670. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{4}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$

671. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{3};\pi n+\pi/2\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$

672. $\{2\pi n/3\pm 2\pi/9;\pi n/3+\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$● សរសេរសមីការជារាង $\cos 3(3x)-2\cos 2(3x)=2$

673. $\{\pi n;\pi n/2\pm\pi/12|n\in\mathbb{Z}\}$ ● សរសេរសមីការជារាង $2\cos 2(2x)=1+\cos 3(2x)$

674. $\{3\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$

675. $\left\{\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$

676. $\{2\pi n;4\pi n\pm 2\pi/3|n\in\mathbb{Z}\}$

677. $\left\{\pi n+\frac{(-1)^n\pi}{6};2\pi n+\pi/2\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$ ● ប្រើសមភាព

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}x\right)=\sin 3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

678. $\{\pi n-\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

679. $\left\{2\pi n\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\arctan\frac{b}{a}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $c^2\le a^2+b^2$; $\{\emptyset\}$ ចំពោះ $c^2>a^2+b^2$ ▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{a^2+b^2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(1)$$

យើងមាន

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

ហើយ

$$-1\le\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1$$

តាង $a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\phi$; $b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\phi$ ។ សមីការ(១) ទៅជា

$$\cos x\cos\phi+\sin x\sin\phi=\cos(x-\phi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

សមីការ(២) មានរឹសបើ

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1 \ \Rightarrow c^2\le a^2+b^2$$

យើងទាញបាន

$$x-\phi=2\pi k\pm\arctan\left(c/\sqrt{a^2+b^2}\right), k\in\mathbb{Z} \quad (3)$$

ដែល $\phi=2\pi m+\arctan\frac{b}{a}$, $m\in\mathbb{Z}$ ។ ត្រង់នេះយើងសន្មតថា $a>0$ ។ ករណី $a=0$ សមីការទៅជា $b\sin x=c$ ។ ករណី $a<0$ គុណសមីការនឹង -1 ។

680. $\{\pi n-\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

681. $\left\{\pi n;\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{6}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

682. $\left\{\frac{4\pi n}{5}+\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi n}{3}+\frac{2\pi}{3}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

683. $\left\{\frac{\pi n}{4}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

684. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8};\pi n+\frac{3\pi}{4}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

685. $\left\{n;\frac{-1\pm\sqrt{4l+3}}{2}\middle| n\in\mathbb{Z}; l\in\mathbb{Z}_0\right\}$; $\mathbb{Z}_0=\{0;1;2;\dots\}$

686. $\{\pi n+\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

687. $\{\pi n/4|n\in\mathbb{Z}\}$

688. $\left\{\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{12};2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

689. $\{\pi n;2\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

690. $\{\pi n-\pi/4;\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

691. $\{2\pi n/3;\pi n+\pi/4;2\pi n-\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

692. $\{\pi n/2|n\in\mathbb{Z}\}$

693. $\{\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

694. $\left\{\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{48};\frac{\pi n}{4}+\frac{3\pi}{32}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

695. $\mathbb{R}\setminus\{\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$

696. $\{\pi n/5;\pi n\pm 3\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

697. $\left\{4\pi n+\frac{17}{6}\pi;\frac{8\pi n}{3}-\frac{5}{18}\pi;\frac{8\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

698. $\left\{\frac{2\pi n}{5};\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi n+\pi\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

699. $\left\{\frac{\pi n}{5};\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$

700. $\{\pi n+\pi/2;\pi n/6+\pi/24|n\in\mathbb{Z}\}$

701. $\{\pi n/4+\pi/8;\pi n/3+(-1)^{n+1}\pi/18|n\in\mathbb{Z}\}$

702. $\{\pi n/5+(-1)^{n+1}\pi/30;\pi n/4+\pi/16;\pi n+3\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

703. $\{\pi n+\pi/2\,;\pi n+(-1)^n\pi/6\,;2\pi n\pm 2\pi/3|n\in\mathbb{Z}\}$

704. $\{\pi n/2; 2\pi n\pm 2\pi/3|n\in\mathbb{Z}\}$

705. $\left\{\frac{\pi}{7}(2n+1)\middle|\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{7l-4|\ l\in\mathbb{Z}\}\right\}$

706. $\{\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$

707. $\left\{\frac{\pi n}{3}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

708. $\left\{\frac{\pi n}{10}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

709. $\{\pi n/3+\pi/6\,;\pi n/5+\pi/10|n\in\mathbb{Z}\}$

710. $\{\pi n;\pi n/5+\pi/10|n\in\mathbb{Z}\}$

711. $\{\pi n;\pi n/3+\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$

712. $\{n-5/12\,;n+1/4|n\in\mathbb{Z}\}$

713. $\{\pi n/2\,;\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $(1-\cos 2x)+2\sin^2 2x=(1-\cos 6x)$; $\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-(\cos 2x-\cos 6x)=0\ \Leftrightarrow 2\sin^2 2x-2\sin 2x\sin 4x=0$

714. $\left\{\pi n/2+\frac{\pi}{4};\frac{\pi n}{5}+\pi/10\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

715. $\{\pi n+\pi/2\,;2\pi n/11+\pi/11\,;2\pi n/5|n\in\mathbb{Z}\}$

716. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

717. $\left\{\frac{2\pi n}{7}+\frac{\pi}{7}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

718. $\left\{\frac{2\pi n}{7}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{7k|k\in\mathbb{Z}\}\right\}$

719. $\left\{\frac{\pi n}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $\sin x\cos 3x\,(1-\cos 2x)+\cos x\sin 3x\,(1+\cos 2x)=-\frac{3}{4}$; $\Leftrightarrow(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)+\cos 2x-\frac{3}{4}\Leftrightarrow$ $\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 4x=-\frac{3}{4}$; $\Leftrightarrow\sin 4x=-\frac{1}{2}$ ។

720. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{8}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

721. $\left\{\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ បំបែកអង្គខាងស្តាំនៃសមីការ $\frac{1}{2}\sin x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)=\frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}(2\sin x\cos 2x+\sin x)=\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x+\sin x)=\frac{1}{4}\sin 3x$

722. $\left\{\frac{2\pi n}{3}\pm\frac{2\pi}{9}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

723. $\left\{\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{9}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

724. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\ |n\in\mathbb{Z}\}$

725. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\ |n\in\mathbb{Z}\}$

726. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\ \middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

727. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right);\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\ \middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

728. $\{\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$

729. $\{\pi n\pm\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$

730. $\{\pi n \pm \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$

731. $\{\pi n/2 + \pi/4\,; \pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

732. $\left\{\pi n/2 + \pi/4\,; \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

733. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; \pi n + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

734. $\left\{\frac{\pi(4n+1)}{2}; \pi(2n+1) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ● តាង $\sin x - \cos x = y \implies 1 - \sin 2x = y^2$ ។

735. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

736. $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{11\pi}{12}; 2\pi n - \frac{5\pi}{12}; \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

737. $\left\{2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}; \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

738. $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

739. $\{(4\pi n + \pi/2)^2; (4\pi n + 11\pi/6)^2 | n \in \mathbb{Z}_0\,;\ (4\pi m - 5\pi/6)^2 | m \in \mathbb{N}\}$

740. $\{2\pi n + 5\pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ ដោះស្រាយសមីការរក $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin x$ យើងទាញបាន

$$\tan x = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{-2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2}\right)/2$$

សមីការមានរឹសទាល់តែ $\sin x = 1/2$ និង $\tan x = -1/\sqrt{3}$ ។

741. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

742. $\{2\pi n - \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

743. $\{2\pi(1 + 4n) | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ សំរួលសមីការជា

$$\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2 \qquad (1)$$

ដោយ $\sin(5x/4) \leq 1, \cos x \leq 1$ នោះសមីការ(១) មានរឹសទាល់តែ $\sin(5x/4) = 1$ និង $\cos x = 1$ ។

744. $\{\pi n/3\,; 2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

745. $\left\{\pi n - \arctan\frac{1}{6}; \pi n - \arctan\frac{1}{3} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

746. $\left[2\pi n - \frac{\pi}{3}; 2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right]; n \in \mathbb{Z}$

747. $\{\pi n \pm \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$

748. $\{2\pi n + 3\pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

749. $\left\{2\pi n - \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

750. $\{2\pi n + \pi/8\,; 2\pi n - 3\pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$

751. $\left\{\frac{\pi n}{2}; \pi n + \pi/6 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

752. $\{2\pi n + \pi/2\,; 2\pi n - \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$

753. $\{2\pi n; 2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$

754. $\left\{2\pi n + \frac{3\pi}{8}; 2\pi n + 7\pi/8\,; 2\pi n + \pi; \pi n + \pi/4 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

755. $\{2\pi n; \pi n - \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$

756. $\{\pi n/3 + (-1)^{n+1}\pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$

757. $\left\{\pi n + \arctan\frac{2}{3}\middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

758. $\{2\pi n + \pi/12\,; 2\pi n - 7\pi/12 | n \in \mathbb{Z}\}$

759. $\{2\pi n + \pi/6\,; 2\pi l/3 + 5\pi/18 | n, l \in \mathbb{Z}\}$

760. $\{4\pi n + 13\pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$

761. $\{2\pi n + \arccos(1/3) | n \in \mathbb{Z}\}$

762. $\{2\pi n + \arccos(1/10) | n \in \mathbb{Z}\}$

763. $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$

764. $\{\log_2(\pi n/4 + \pi/8) | n \in \mathbb{Z}_0\}$

765. $\left\{1; \frac{7}{12}\pi; \pi n - \frac{\pi}{12}; \pi n + \frac{7}{12}\pi \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$

766. សមីការទាំងពីរមិនដូចគ្នាទេ។ សមីការទីមួយមានរឹស $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n + \pi/2\,| n \in \mathbb{Z}\}$ សមីការទីពីរមានរឹស$\{\pi n - \pi/4\,| n \in \mathbb{Z}\}$ ។

767. $[\sqrt{5} - 1; 2]$

768.▲ យក $x = 0$ យើងទាញបាន $1 + b^2 = \cos(b^2)$ ។ នាំអោយ $b = 0$ ។ យើងទាញបាន

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1 \quad (*)$$

បើ $a = 0$ នោះ (*) ពិតចំពោះគ្រប់ x ។ នោះយើងសិក្សាករណី $a \neq 0$ ម្តង។ ដោយ(*) ពិតជានិច្ច នោះ យក $x = 2\pi$ យើងទាញបាន $\cos 2a\pi = 1$ នាំអោយ $2a\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ដូច្នេះ

$$a = k, a \neq 0$$

យក $x = \frac{2\pi}{a}$ ជំនួសចូល(*) យើងទាញបាន

$$a\left(\cos\frac{2\pi}{a} - 1\right) = 0$$

ដោយ $a \neq 0$ នោះ $\cos\frac{2\pi}{a} = 1; \frac{2\pi}{a} = 2m\pi; m \in \mathbb{Z}$ ។ យើងទាញបាន $a = \frac{1}{m}$ ។ ដោយ $a \in \mathbb{Z}$ នោះ $a = \pm 1$ ។

បើ $a = 1; b = 0$ នោះ $\cos x - 1 = \cos x - 1$ ពិតគ្រប់ x ។

បើ $a = -1; b = 0$ នោះ $-\cos x + 1 = \cos x - 1$ មិនពិតគ្រប់ x ។

ដូច្នេះសមីការពិតគ្រប់x បើ $(a = 0; b = 0)$ រឺ $(a = 1; b = 0)$ ។

IV. ប្រព័ន្ធសមីការ

769. $\left\{\left(2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3} + \frac{13\pi}{2}; 2\pi n \pm \arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$

770. $\left\{\left(\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} - \pi n\right) | n \in \mathbb{Z}\right\}$

771. $\left\{\left(2\pi n \pm \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)}+\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}-2\pi n \pm \arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)}\right)\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in$ $\left[-2\cos\frac{\pi}{8};2\cos\frac{\pi}{8}\right]$

772. $\left\{\left(\frac{\pi}{5}(n+4k)\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a;\frac{\pi}{5}(n-6k)\pm\frac{\pi}{5}+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0]$

773. $\left\{\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right);\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

774. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi(2n-m)+\frac{\pi}{4}\right)\middle|\, n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

775. $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{7\pi}{6};2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

776. $\left\{\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)\middle|\, n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

777. $\left\{\left(2\pi n\pm\frac{3\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)\middle|\, n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

778. $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\pm\arccos\left(-\frac{a}{3}\right)\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;3]$;
$\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\pi(2k+1)\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a=-3$

779. $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right);\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\pi k-\arctan a\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$; $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;-1]$; $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\pi k-\arctan a\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-1;1)$

780. $\left\{\left(\frac{\pi k}{2}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8};\frac{\pi n}{5}-\frac{1}{5}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\middle|\, n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

781.▲ តាង $a=\tan x;b=\tan y;c=\tan z$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=m^2 & (1)\\ a^3+b^3+c^3=m^3 & (2)\end{cases}$$

ក) បើ $m=0$ នោះ $a=b=c=0$ យើងទាញបាន $(x;y;z)=(p\pi;h\pi;k\pi)$

ខ) បើ $m\neq 0$ លើកសមីការទី(២)ជាការេ យើងទាញបាន

$$m^6=(a^3+b^3+c^3)^2$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&m^6=(a^3+b^3+c^3)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)\\ &\Rightarrow\ m^6\leq m^2(a^4+b^4+c^4)\\ &\Rightarrow\ m^4\leq a^4+b^4+c^4 \qquad (4)\end{aligned}$$

សមីការទី(១) នាំអោយ

$$m^4=(a^2+b^2+c^2)^2=(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

ហើយតាម(៤) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leq a^4+b^4+c^4\\ &\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leq 0\\ &\Rightarrow\begin{cases}a^2b^2=0\\ b^2c^2=0\\ c^2a^2=0\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow(a=m;b=c=0);(a=0;b=m;c=0);(a=b=0;c=m)$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ m សមីការមានចំលើយ

$$\left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

V. វិសមភាព

782.▲ ដោយ $\pi/6 < \alpha < \pi/3$ នោះ $1/\sin\alpha < 2$ និង $1/\cos\alpha < 2$ ។ ដូច្នេះ

$$0 \le \frac{\pi \sin x}{4\sin\alpha} \le \frac{\pi}{4\sin\alpha} < \frac{\pi}{2}; 0 \le \frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \le \frac{\pi}{4\cos\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) \ge 0;\ \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \ge 0$$

ករណី $x < \alpha$ នោះ $\cos x > \cos\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \ge \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) > \tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right) = 1$$

ករណី $x = \alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) = \tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right) = 2 > 1$$

ករណី $x > \alpha$ នោះ $\sin x > \sin\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) + \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right) \ge \tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right) > \tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right) = 1$$

783.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} &4\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 3 \\ &\qquad \le (1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)(1+\tan^2 C) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1\right) - 4\left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} - 3\right) - 3$$

$$\le \frac{1}{\cos^2 A}\frac{1}{\cos^2 B}\frac{1}{\cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos 2A + \cos 2B) + 4\cos^2 C + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos(A+B)\cos(A-B) + 4\cos^2 C + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A-B) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) \ge 0$$

ពិត។

784.▲ យើងមាន

$$1 - \sin\frac{\pi}{14} = \sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} + \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{14} + \sin\frac{7\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right) \qquad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} \qquad (2)$$

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} \qquad (3)$$

តាង $x = \cos\frac{\pi}{7}; y = \cos\frac{2\pi}{7}, z = \cos\frac{3\pi}{7}$ ។ តាម(២) និង (៣) វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$x + y + z > \sqrt{3(xy + yz + zx)} \qquad (4)$$

ដោយ $x, y, z > 0$ នោះ (៤) អាចសរសេរជា

$$(x + y + z)^2 > 3(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 > 0 \quad (5)$$

ដោយ x, y, z មានតំលៃខុសគ្នា នោះវិសមភាព(៥)ពិត។

785.▲ ដោយ $x_i \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ នោះ

$$\frac{1}{2} \le \sin x_i \le 1 \iff (\sin x_i - 1)\left(\sin x_i - \frac{1}{2}\right) \le 0; \quad (i = 1; 2; \dots 2n)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x_i - \frac{3}{2}\sin x_i + \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x_i + \frac{1}{2\sin x_i} \le \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{2n} \sin x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i} \le \frac{3}{2}2n = 3n$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{2n} \sin x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i} \ge 2\sqrt{\frac{1}{2}Y}$$

យើងទាញបាន $Y \le \frac{9}{2}n^2$ ។ យើងមាន $Y = 1800; \Longrightarrow n \ge 20$ ។សញ្ញាស្មើកើតមានទាល់តែ $\sin x_i = 1$ រឺ $\sin x_i = \frac{1}{2}$ និង $\sum_{i=1}^{2n} \sin x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}$ ។ តាង α ជាចំនួន$\sin x_i = 1$ និង β ជាចំនួន $\sin x_i = \frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះ

$$\alpha + \beta = 2n; \alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha + \beta \quad \Longrightarrow \alpha = \beta = n$$

ដូច្នេះ n តូចបំផុតស្មើ $n = 20$ ។

786.▲ យើងមាន

$$\tan\frac{A}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B + C}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4} + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4} + \tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4} + \tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}$$

$$= 1 + \tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងទាញបាន

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}$$

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

ដូច្នេះ

$$1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

តាង $t=\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}>0$ ។ ដូច្នេះ

$$1+t^3\geq 3t+3t^2$$

$$\Longrightarrow t\leq 2-\sqrt{3}; \text{រឺ } t\geq 2+\sqrt{3}$$

ដោយ A,B,C ជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ $0<t<1$ ដូច្នេះ $t\leq 2-\sqrt{3}$ ។ មានន័យថា

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\leq\left(2-\sqrt{3}\right)^3$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan\frac{A}{4}=\tan\frac{B}{4}=\tan\frac{C}{4}=2-\sqrt{3}$ រឺពេល $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ ។ ដូច្នេះតំលៃធំបំផុតគឺ $\max T=\left(2-\sqrt{3}\right)^3$។

787.▲ យើងមាន $0<(n+1)x<\pi/2$ ដូច្នេះ $0<nx<\frac{\pi}{2}; 0<x<\pi/2$ ។ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\tan nx\sin x+\cos^{2n}x>1$$

តាង $f(n)=\tan nx\sin x+\cos^{2n}x$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា

$$f(k+1)>f(k),\forall k=0,1,2,\dots,n-1$$

យើងមាន $f(k+1)>f(k)$

$$\Leftrightarrow \tan(k+1)x\sin x+\cos^{2(k+1)}x>\tan kx\sin x+\cos^{2k}x$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k}x-\cos^{2k+2}x<\sin x\left(\tan(k+1)x-\tan kx\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k}x\sin^2x<\frac{\sin x\sin x}{\cos(k+1)x\cos kx}$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k}x<\frac{1}{\cos(k+1)x\cos kx}$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k}x\cos(k+1)x\cos kx<1$$

ពិត។ ដូច្នេះ $f(n)>f(n-1)>\cdots>f(0)=1$ ពិត។

788.▲ បើ A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2};$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right)<4\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right)<\frac{4}{27}$$

តាង $x=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}; y=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}; z=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$ ។ ដូច្នេះ $x,y,z>0; x+y+z=1$ ហើយវិសមភាពសមមូលនឹង

$$x^2y+y^2z+z^2x<\frac{4}{27} \quad (1)$$

តាង $P=x^2y+y^2z+z^2x$ ។ សន្មតថា $x\geq y>0; x\geq z>0 \Rightarrow y^2z\leq xyz; z^2x\leq x^2z$ ។ ដូច្នេះ

$$P=x^2y+y^2z+z^2x\leq x^2y+xyz+\frac{1}{2}z^2x+\frac{1}{2}x^2z$$
$$=xy(x+z)+\frac{1}{2}xz(x+z)$$
$$=x(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right)=4.\frac{x}{2}\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)$$

ប្រើវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះតួ $\frac{x}{2},\left(\frac{x+z}{2}\right),\left(y+\frac{z}{2}\right)$ ហើយដោយដឹងថា $\frac{x}{2}\neq\frac{x+z}{2}$ យើងទាញបាន

$$P<4\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x+z}{2}+y+\frac{1}{2}z}{3}\right)^3=4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

789.▲ តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A,B,C ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងមាន

$$\sin A=\frac{a}{2R};\sin B=\frac{b}{2R};\sin C=\frac{c}{2R}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{c^2}=m$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស យើងទាញបាន

$$a^2+b^2=m(a^2+b^2+2ab\cos C)$$
$$\Longrightarrow |\cos C|=\frac{|m-1|}{m}\frac{a^2+b^2}{2ab}\geq\frac{|m-1|}{m}$$
$$\Longrightarrow \sin^2 C=1-\cos^2 C\leq 1-\frac{(m-1)^2}{m^2}=\frac{2m-1}{m^2}$$
$$\Longrightarrow \sin C\leq\frac{\sqrt{2m-1}}{m}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b$ រឺ $A=B$។ ដូច្នេះ $\max\sin C=\frac{\sqrt{2m-1}}{m}$ ។

790.▲ យើងមាន

$$f(\tan 2x)=\tan^4 x+\cot^4 x=(\tan^2 x+\cot^2 x)^2-2\tan^2 x\cot^2 x$$
$$=((\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x)^2-2$$
$$=\left(\frac{1}{\sin^2\cos^2 x}-2\right)^2-2$$
$$=\left(\frac{4}{\sin^2 2x}-4+2\right)^2-2$$
$$=\left(4\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}+2\right)^2-2$$
$$=\left(\frac{4}{\tan^2 2x}+2\right)^2-2$$
$$=\frac{16}{\tan^4 2x}+\frac{16}{\tan^2 2x}+2$$

តាង $t = \tan 2x \implies f(t) = 16/t^4 + 16/t^2 + 2$ ។ ដូច្នេះ

$$f(\sin x) + f(\cos x) = 16\left[\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right] + 4$$
$$= 16[4 + 3(\cot^2 x + \tan^2 x) + \cot^4 x + \tan^4 x] + 4$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\cot^2 x + \tan^2 x \geq 2$$
$$\cot^4 x + \tan^4 x \geq 2$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan^2 x = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 16[4 + 3.2 + 2] + 4 = 196$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

791.▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថាវិសមភាព

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} \qquad (1)$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $a, b, t \in \mathbb{R}$ ដែល $a < b; b > t \geq 0$ ។ យើងមាន

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} \iff a(b-t) \geq (a-t)b$$
$$\iff ab - at \geq ab - bt$$
$$\iff at \leq bt$$
$$\iff 0 \leq t(b-a)$$

ពិត។

ក្នុងត្រីកោណABC មួយ បើ $A > B > C$ នោះ $a > b > c$ ដែល a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C ។ យើងមាន $a = 2R\sin A > b = 2R\sin B > c = 2R\sin C$ ដូច្នេះ $\sin A > \sin B > \sin C$ ។

ដែនកំនត់របស់y :

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq 0 \\ \dfrac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \sin B \\ x < \sin C \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right.$$

ចំពោះ $x \geq \sin A$:

ប្រើវិសមភាព(១)ចំពោះ $t = x - \sin A \geq 0$

$$\frac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin A-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = 0$$
$$\frac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin B-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}$$
$$\implies y \geq 0 + \sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \sin A$ ។ ហើយ

$$\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1 \leq 1 \iff \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C} \leq 4$$
$$\iff \sin A - \sin B \leq 4\sin A - 4\sin C$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 3\sin A + \sin B - 4\sin C$$
$$\Leftrightarrow 0 \le 3\,(\sin A - \sin B) + (\sin B - \sin C)$$

ពិត។

ចំពោះ $x < \sin C$: យើងមាន

$$y > \sqrt{1} + \sqrt{1} - 1 = 1$$

ដូច្នេះ $\min y = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ ពេល $x = \sin A$ ។

VI. វិសមីការ

792. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$;

793. $[2\pi n - 2\pi/3\,; 2\pi n + 2\pi/3]; n \in \mathbb{Z}$;

794. $(\pi n - \arctan 2\,; \pi n + \pi/3); n \in \mathbb{Z}$;

795. $(\pi n; \pi n + \pi/2] \cup [\pi n + 3\pi/4\,; \pi(n+1)); n \in \mathbb{Z}$

796. $(-\pi/4 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$

797. $\left(2n - \frac{1}{8}; 2n + 7/8\right); n \in \mathbb{Z}$

798. $\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{5\pi}{24}; \frac{\pi(n+1)}{2} + \frac{\pi}{24}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$

799. $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\} \cup \left[\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \pi/6\right] \cup \left[\pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \pi/4\right]; n \in \mathbb{Z}$ ●
$\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 2x \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1)}{2}$

800. $\{\mathbb{R}\} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

801. $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

802. $\left(\pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}; \pi(n+1) - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $8\sin^6 x - \cos^6 x = (2\sin^2 x - \cos^2 x)(4\sin^4 x + 2\sin^2 x . \cos^2 x + \cos^4 x)$ បន្ទាប់មកទៀត $4\sin^4 x + 2\sin^2 x . \cos^2 x + \cos^4 x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

803. $\left(\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \frac{\pi}{4}\right); n \in \mathbb{Z}$

804. $\left(2\pi n - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\pi(2n+1); 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$ ●
តាង $\sin x + \cos x = y$

805. $\left(\arctan(\sqrt{2} - 1); \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi + \arctan(\sqrt{2} - 1)\,; \frac{5\pi}{4}\right)$

806. $\left(\pi n + \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pi(n+1) - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$

807. $[2\pi n - 7\pi/6\,; 2\pi n + \pi/6]; n \in \mathbb{Z}$

808. $(\pi/4 + \pi n; \pi/2 + \pi n); n \in \mathbb{Z}$

809. $[n + 1/4\,; n + 3/4]; n \in \mathbb{Z}$

VII. ប្រព័ន្ធវិសមីការ

810. ▲ដោយ $0 \le x \le \pi/4$ នោះ $\cos x \ne 0$ ។ ចែកសមីការទីមួយនឹង $\cos^3 x$ និងតាង $\tan x = t$ យើងទាញបាន

$$(4-6m)t^3 + 3(2m-1)t(t^2+1) + 2(m-2)t^2 - (4m-3)(t^2+1) = 0$$
$$(4-6m)t^3 + (6m-3)t^3 + (6m-3)t + (2m-4)t^2 - (4m-3)t^2 - 4m + 3 = 0$$
$$t^3 - (1+2m)t^2 + 3(2m-1)t - 4m + 3 = 0$$
$$(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$$

យើងទាញបាន $t = 1$ ដែលត្រូវនឹង $x = \frac{\pi}{4}$ ជាឫសមួយនៃប្រព័ន្ធ។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫសតែមួយគត់បើលក្ខខណ្ឌមួយក្នុងចំនោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមត្រូវបានបំពេញ

១) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មាន $\Delta = m^2 - 4m + 3 < 0 \implies 1 < m < 3$

២) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានឫសមួយគត់ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះ $1 - 2m + 4m - 3 = 0; m = 1$។ បើ $m = 1$ នោះ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសមួយគត់។

៣) សមីការ$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានឫស $t_1 \le t_2 < 0$ ដូច្នេះ

$$\Delta > 0; t_1t_2 = 4m - 3 > 0; S = t_1 + t_2 = 2m < 0$$

វិសមីការនេះគ្មានឫស។

ដូច្នេះដើម្បីអោយប្រព័ន្ធមានឫសមួយគត់ $1 \le m < 3$ ។

៤. ពហុធា

I. គណនា

811. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលអោយសមមូលនឹង

$$P(xy) = P(x).P(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ក្នុង (1) យើងយក $x = y = 0$ យើងទាញបាន

$$P(0) = P^2(0)$$

ដូច្នេះ $P(0) = 1$ រឺ $P(0) = 0$ ។

១) បើ $P(0) = 1$ នោះ ក្នុង(1) យក $y = 0$ យើងទាញបាន $P(0) = P(x).P(0)$ នោះ

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

២) បើ $P(0) = 0$ នោះ $P(x) = xQ(x)$ ដែល $Q(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $P(x)$ មួយឯកតា។ លក្ខខណ្ឌ(1) ទៅជា

$$xyQ(xy) = xyQ(x).Q(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

នោះ $Q(xy) = Q(x).Q(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $Q(x) = 1$ រឺ $Q(x) = x\, Q_1(x)$ ដែល $Q_1(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $Q(x)$ មួយឯកតា។ ដូច្នេះជាសរុបយើងទាញបាន

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$P(x) = x^n;\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

812. ▲ ដោយដឹងថា $2x + 1 = (x+1)^2 - x^2$ នោះលក្ខខណ្ឌដែលអោយសមមូលនឹង

$$P(x+1) - (x+1)^2 = P(x) - x^2$$

តាង $Q(x) = P(x) - x^2$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(x+1) = \cdots = Q(x+n) = \cdots$ ។ ដូច្នេះ $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n) = \cdots$ ។ យើងទាញបាន $Q(x) - Q(0) \equiv 0$ ចំពោះ $x = 0, x = 1, \ldots, x = n, \ldots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) - Q(0) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។ យើងទាញបាន

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសទំនាក់ទំនងដែលបានចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន

$$(x+1)^2 + C = x^2 + 2x + 1 + C$$

ពិតចំពោះគ្រប់ C ។ ដូច្នេះ

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ។

813. ▲ យើងមាន

$$P((x+1)^2) - (x+1)^2 = P(x^2) - x^2$$

តាង $Q(t) = P(t) - t$ ។ យើងទាញបាន $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n^2) = \cdots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(0)$ ។ យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែលC ជាចំនួនថេរណាមួយ។

814. ▲ពហុធា $f(x) - 5$ មានរឹសជាចំនួនគត់ a, b, c, d ។ ដូច្នេះ

$$f(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)g(x)$$

ដែល $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$ និង $b_1, b_2, \dots, b_m$ ជាចំនួនគត់។ សមីការ $f(x) = 8$ សមមូលនឹង

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)g(x) = 3$$

ដូច្នេះបីក្នុងចំនោមចំនួនគត់បួន $x - a, x - b, x - c, x - d$ ស្មើ 1 រឺ -1។ ដូច្នេះត្រូវមានពីរដែលស្មើគ្នា ដែលករណីនេះមិនអាច ព្រោះចំនួនទាំងបួនខុស។

៥. សមីការអនុគមន៍

I. គណនា

815. ▲ តាមលក្ខខណ្ឌទី១យើងទាញបាន

$$f\big(f(f(x)+1)\big) = f(1-x)$$

តាមលក្ខខណ្ឌទី២ យើងទាញបាន

$$f(x)+1 = f(1-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ជំនួស $t = 1-x$ យើងទាញបាន

$$f(1-t)+1 = f(t)$$

ដូច្នេះ $f(1-x)+1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ជំនួសចូល(1) យើងទាញបានថា គ្មានអនុគមន៍ណាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ។

816. ▲ យើងមាន $f(1)+f(2) = 4f(2) \ \Rightarrow f(2) = \frac{f(1)}{3} = \frac{2}{3}$ (1) ។ ចំពោះ $n \geq 3$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n) = n^2 f(n) \\ f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1) \end{cases}$$

យើងទាញបាន $\qquad f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1)$

$$\Rightarrow \qquad f(n) = \frac{n-1}{n+1} f(n-1)$$

ដូច្នេះចំពោះ $n \geq 3$ យើងទាញបាន

$$f(n) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n+1)n\ldots 4} f(2) = \frac{6}{n(n+1)} f(2) = \frac{4}{n(n+1)}$$

817. ▲ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(x) = 0$ ជាចំលើយតែមួយគត់។ សន្មតថាចំនោទមានចំលើយ $f(x) \neq 0$ ។ ដូច្នេះមានចំនួន $a \in \mathbb{R}$ ដែល $f(a) = b \neq 0$ ។ យើងយក $y = a$ យើងទាញបាន

$$f(xb) = x^n f(b)$$

តាង $t = xb$ ។ យើងទាញបាន

$$f(t) = \frac{f(b)}{b^n} t^n = Ct^n$$

ដែល C ជាចំនួនថេរ។ ជំនួស $f(x) = Cx^n$ ចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌ យើងទាញបាន $C = 0$ ដូច្នេះ $f(x) = 0$ ។

818. ▲ លក្ខខណ្ឌ $af(x^2+yz)+bf(y^2+zx)+cf(z^2+xy) = 0$ (1) មានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹង x, y, z ។ ដូច្នេះដោយសារលក្ខណៈនេះ និងដោយសារ a, b, c មិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា យើងអាចសន្មតថា $a \neq 0$ ។

យក $y = z = 0$ យើងបាន $af(x^2)+(b+c)f(0) = 0 \ \Rightarrow f(x^2) = -\frac{(b+c)f(0)}{a}$ ចំពោះគ្រប់ x ។

យក $x=0, z=1$ យើងបាន $af(y)+bf(y^2)+cf(0)=0$ ។ ដូច្នេះ

$$f(y)=-\frac{bf(y^2)+cf(0)}{a}=-\frac{-\frac{b+c}{a}f(0)+cf(0)}{a}=\frac{b^2+bc-ac}{a^2}.f(0)$$

ចំពោះគ្រប់ $y\in\mathbb{R}$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។ តាង $f(x)=K$ ។ ជំនួសចូលក្នុង(1) យើងទាញបាន

$$(a+b+c)K=0$$

បើ $a+b+c\neq 0$ នោះ $K=0$ ដូច្នេះ $f(x)\equiv 0$ ។

បើ $a+b+c=0$ នោះ K ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។

819. ▲ យក $y=1$ យើងទាញបាន $f\big(xf(1)\big)=x^p$ ។ $f(1)$មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះបើស្មើសូន្យ នោះ $f(0)=x^p$ ចំពោះគ្រប់ x មិនអាច។ តាង $c=f(1)$ ដូច្នេះ $f(x)=x^p/c^p$ ។ ដូច្នេះ

$$x^py^q=f\big(xf(y)\big)=\frac{[xf(y)]^p}{c^p}=\frac{x^py^{p^2}}{c^{p+p^2}}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $c=1$ និង $q=p^2$។ បើ $q=p^2$ នោះយើងទាញបាន

$$f\big(xf(y)\big)=x^p[f(y)]^p=x^py^{p^2}=x^py^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}^+$ ។

820. ▲ ពីលក្ខខណ្ឌទីមួយ ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{Z}$ និង $k\in\mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases}f(m+k.19)\geq f(m)+k.19\\ f(m-k.19)\leq f(m)-k.19\end{cases}$$

ពីលក្ខខណ្ឌទីពីរ ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{Z}$ និង $k\in\mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases}f(m+k.99)\leq f(m)+k.99\\ f(m-k.99)\geq f(m)-k.99\end{cases}$$

សមីការ $1=19x+99y$ មានរឺស $x=-26+99t; y=5-19t, t\in\mathbb{Z}$ ។ ចំពោះ $t=0;1$ យើងទាញបាន $(x;y)=\{(-26;5);(73;-14)\}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{Z}$ យើងមាន

$$f(m+1)=f(m-19.26+99.5)\leq f(m+99.5)-19.26\leq f(m)+99.5-19.26$$
$$=f(m)+1$$
$$f(m+1)=f(m+73.19-14.99)\geq f(m-14.99)+19.73\geq f(m)-14.99+19.73$$
$$=f(m)+1$$

ដូច្នេះ $f(m+1)=f(m)+1$ ចំពោះ $m\in\mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះ $f(m+n)=f(m)+n$ ចំពោះគ្រប់ $m,n\in\mathbb{Z}$ ។ យក $m=0$ យើងទាញបាន $f(n)=f(0)+n$។ តាង $a=f(0)$ ។ ដូច្នេះ $f(n)=a+n$ ។ ជំនួសចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌដើមយើងទាញបាន $f(n)=n+a$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $a\in\mathbb{Z}$ ។

821. ▲ អោយ $x=y=0$ យើងទាញបាន $f(0)=0$ ។ អោយ $y=0$ យើងទាញបាន $xf(x)=f^2(x) \Rightarrow f(x)=0$ រឺ $f(x)=x$ ។ យើងឃើញថា $f(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ រឺ $f(x)=x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលអោយ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងបង្ហាញថា បន្សំនៃអនុគមន៍ទាំងពីរមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ មានន័យថា អនុគមន៍

$$f(x)=\begin{cases}0; x\in D_1\\ x; x\in D_2\end{cases}$$

ដែល $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ។ ឧបមាផ្ទុយពីនេះថា មាន $x_1 \in D_1; x_2 \in D_2$ ដែល $f(x_1) = 0$ និង $f(x_2) = x_2$ ។ ចំពោះ $x_1 \in D_1$ ដែល $x_1 \neq 0$ គេអាចរកបាន មេគុណ a មួយដែល $ax_1 = x_2$ គឺ $a = x_2/x_1$។

ជំនួសy ដោយ x និង x ដោយ y យើងទាញបាន

$$xf(x+y) + yf(y-x) = yf(x+y) + xf(x-y)$$
$$(x-y)f(x+y) = (x-y)f(x-y)$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x+y) = f(x-y)$$

តាង $t = x - y; \Longrightarrow x = t + y$ ដូច្នេះ $f(t+2y) = f(t)$ ចំពោះគ្រប់ $t, y \in \mathbb{R}$ ។ យក $y = bt$ ។ ដូច្នេះ $f\big((1+2b)t\big) = f(t)$ ។ តាង $K = 1 + 2b$ នោះ

$$f(Kt) = f(t)$$

ចំពោះគ្រប់ $K, t \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ ដោយយក $K = a;\ f(ax_1) = f(x_1)\ \Rightarrow ax_1 = 0$ អាចតែករណី $ax_1 = x_2 = 0$ មួយប៉ុណ្ណោះ។ ដូច្នេះ

$$f(x) = 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ រឺ } f(x) = x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

822. ▲ អោយ$x = y$ យើងទាញបាន $f(0) = 0$ ។ អោយ $y = 1$ យើងទាញបាន

$$f(x+1)(f(x)-1) = f(x-1)[f(x)+1] \qquad (1)$$

អោយ $x = 2$ យើងទាញបាន $f(3)(f(2)-1) = f(2)+1$ ។ ដោយ $f(2) \neq 1$ នោះ

$$f(3) = \frac{f(2)+1}{f(2)-1} = 1 + \frac{2}{f(2)-1}$$

ដោយ $f(2), f(3)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2) - 1$ ត្រូវតែជាតួចែកនៃ 2 ។ ដូច្នេះ

$f(2) - 1 = 2$ នោះ $f(2) = 3; f(3) = 2$

$f(2) - 1 = 1$ នោះ $f(2) = 2; f(3) = 3$

$f(2) - 1 = -1$ នោះ $f(2) = 0; f(3) = -1$

$f(2) - 1 = -2$ នោះ $f(2) = -1; f(3) = 0$

1) ករណី $f(2) = 3; f(3) = 2$

ក្នុង(១) ជំនួស $x = 3$ យើងទាញបាន $f(4) = 9$ ។ ជំនួស $x = 4$ យើងទាញបាន $f(5) = \frac{5}{2}$ មិនយក។

2) ករណី $f(2) = 2; f(3) = 3$ ។ តាមវិចារដោយកំនើន យើងទាញបាន

$$f(n) = n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

3) ករណី $f(2) = 0; f(3) = -1$ ។ តាមវិចារដោយកំនើន យើងទាញបាន

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1, & n = 4k-1 \end{cases}$$

4) ករណី $f(2) = -1; f(3) = 0$ ។ តាមវិចារដោយកំនើន យើងទាញបាន

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 3k \\ 1, & n = 3k+1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1, & n = 3k-1 \end{cases}$$

823. ▲ យើងមាន $f(1) = 1; f(2) = 2$ ។ សន្មតថា $f(k) = k$ ចំពោះ $k = 1,2, \dots, n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(n+1) = n+1$ ។

បើ $n+1 = 2j$ នោះ $1 \le j < n$ ហើយ

$$f(n+1) = f(2j) = f(2)f(j) = 2j = n+1$$

បើ $n+1 = 2j+1$ នោះ $1 \le j < n$ ហើយ

$$2j = f(2j) < f(2j+1) < f(2j+2) = f(2)f(j+1) = 2j+2$$

ដូច្នេះ $2j < f(2j+1) < 2j+2$ ។ ដោយ $f(2j+1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2j+1) = 2j+1 = n+1$ ។

824. ▲ យក $x = y$ យើងទាញបាន $0 < 2f^2(x^2) \le 2f(x)f(x^3)$ ដូច្នេះ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

យក $x = 0$ យើងទាញបាន

$$0 < 2f^2(0) \le f(0)f(y^3) + f(0)f(y)$$
$$f(0)[2f(0) - f(y) - f(y^3)] \le 0$$

យើងទាញបាន

១) បើ $f(0) < 0$ នោះ $0 > 2f(0) \ge f(y) + f(y^3)$ ហើយដោយ $f(y)$ និង $f(y^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះ $f(y) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $y \in \mathbb{R}$ ។ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល $f(1999) > 0$ ។

២) បើ $f(0) > 0$ នោះ $0 < 2f(0) \le f(y) + f(y^3); \forall\, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(y) > 0\,; \forall y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(2000) > 0$ ។

៣) បើ $f(0) = 0$ នោះ តាង $f(x) = x^n g(x)$ ដែល $g(0) \ne 0$ ។ ដោយ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $x^n g(x)$ និង $(x^n)^3 g(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។ ដោយ x^n និង $(x^n)^3$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $g(x)$ និង $g(x^3)$ ក៏ត្រូវតែមានសញ្ញាដូចគ្នាដែរ។ យើងមាន

$$0 < 2x^{4n}g^2(x^2) \le 2x^n g(x) x^{3n} g(x^3) = 2x^{4n} g(x) g(x^3); \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ អាច $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ រឺ $g(x) < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$។ តែដោយ $f(1999) > 0$ នោះ $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ $f(2000) = 2000^n g(2000) > 0$ ។

ឯកសារដើម

សៀវភៅនេះដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅខាងក្រោមនេះ

1. Pierre Bornsztein, *Inégalité*, 2001

2. Hojoo Lee, *Topic in Inequalities-Theorems and Techniques*

3. A.I Prilepko, *Problem Book in High-School Mathematics*, MIR Moscow, 1985*

4. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Publications, INC. New York, 1993.

5. Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium*, Springer, 2006

6. GS. PHAN ĐỨC CHÍNH, *101 Bài Toán Chọn lọc*, Nhà Xuất Bản Trẻ,1996

7. *Tuyển Tập Đề thi olympic 30-4,Môn Toán*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 1999.

* លំហាត់គ្រឹះស្ទើរតែទាំងអស់ត្រូវបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅមួយក្បាលនេះ។